Contrôle de l'équation de la chaleur par des formes

Camille POUCHOL, MAP5 - Paris **Emmanuel TRÉLAT**, LJLL - Paris
Christophe ZHANG, INRIA - Nancy

On s'intéresse à un problème de contrôle approché de l'équation de la chaleur par des "formes", inspiré par le problème d'optimisation introduit dans [1] : pour un temps $T > 0$ fixé, et une cible $y_f \in L^2$, et $\varepsilon > 0$, étant donné le système

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = u(t,x) \\ \quad y_{|\partial\Omega} = 0, \\ \quad y(0) = y_0 \in L^2, \end{cases} \tag{1}$$

on cherche un contrôle u satisfaisant la contrainte :

$$u(t) \in \{M\chi_\omega, \quad |\omega| \leq m_L, \quad M \in \mathbb{R}_+\}, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2}$$

et tel que la solution correspondante vérifie

$$\|y(T) - y_f\|_{L^2} \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Ces contrôles très particuliers peuvent être vus comme des points extrémaux d'un certain ensemble convexe : or beaucoup de problèmes de contrôle optimal (et d'optimisation en général) ont pour minimiseurs (ou maximiseurs) des points extrémaux. L'idée est donc de considérer en premier lieu un problème avec des contraintes moins fortes que (2) (un ensemble convexe), et de résoudre un certain problème de contrôle optimal avec ces contraintes relaxées.
Pour trouver un "bon" problème d'optimisation, on combine la dualité de Fenchel-Rockafellar, qui associe à un problème d'optimisation (dit primal) un problème dit dual, et le principe "de la baignoire", qui concerne la maximisation sous contraintes d'un produit scalaire. Les contrôles optimaux associés à ce "bon" problème ont alors de bonnes chances d'être des formes, et de répondre ainsi à la question initiale.
La méthode de preuve permet d'étudier plus généralement la question du contrôle d'EDP avec des contraintes sur le contrôle, notamment le phénomène dit "bang-bang" : en dimension finie, il a été souvent observé que les contrôles optimaux (notamment les contrôles en temps minimal) saturent les contraintes qui leur sont imposées, et ont donc une forme plus simple (par exemple, une fonction constante par morceaux en temps). De tels résultats existent déjà pour divers problèmes de contrôle de l'équation de la chaleur ([2, 3, 4, 5]). Le résultat de contrôlabilité par les formes peut s'interpréter de la même façon.

[1] G. Lance, E. Trélat, E. Zuazua. *Shape turnpike for linear parabolic PDE models.* Systems & Control Letters, **142**, 104733, 2020. doi :https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104733.

[2] S. Micu, I. Roventa, M. Tucsnak. *Time optimal boundary controls for the heat equation.* Journal of Functional Analysis, **263(1)**, 25–49, 2012. Publisher : Elsevier.

[3] V. J. Mizel, T. I. Seidman. *An abstract bang-bang principle and time-optimal boundary control of the heat equation.* SIAM Journal on Control and Optimization, **35(4)**, 1204–1216, 1997.

[4] E. G. Schmidt. *The "bang-bang" principle for the time-optimal problem in boundary control of the heat equation.* SIAM Journal on Control and Optimization, **18(2)**, 101–107, 1980.

[5] D.-H. Yang, B.-Z. Guo, W. Gui, C. Yang. *The Bang–Bang Property of Time-Varying Optimal Time Control for Null Controllable Heat Equation.* Journal of Optimization Theory and Applications, **182(2)**, 588–605, 2019. Publisher : Springer.

Contact : `christophe.zhang@inria.fr`