Stabilité des schémas d'ordres élevés en domaine borné d'espace

Benjamin BOUTIN, IRMAR - Université de Rennes 1
Pierre LE BARBENCHON, IRMAR - Université de Rennes 1
Nicolas SEGUIN, IRMAR - Université de Rennes 1

Mots-clés : Stabilité GKS, Condition de bord Lax-Wendroff Inverse, Modes d'instabilité, Matrices Quasi-Toeplitz, Déterminant de Kreiss–Lopatinskii, Étude numérique.

Le but de cet exposé est d'étudier les schémas numériques d'ordres élevés en domaine borné d'espace et notamment les aspects de stabilité. On s'intéressera particulièrement aux schémas différences finies explicites à un pas en temps approchant les solutions de l'équation de transport en dimension 1.
Les conditions de bord considérées sont du type Lax-Wendroff Inverse (voir article [4]) ou des conditions hybrides qui mêlent aussi une extrapolation d'un nombre fixe de mailles intérieures. Ces deux méthdoes permettent de fixer la consistance en entrée à un certain ordre, le but étant d'étudier la stabilité du schéma.

La théorie GKS introduite dans l'article [3] est un outil puissant pour étudier la stabilité des problèmes en domaine spatial borné. En effet, cet article donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème en domaine semi-borné (borné d'un seul côté) soit stable, notamment à travers l'étude du *déterminant de Kreiss–Lopatinskii* et des *valeurs propres généralisées*. Cette théorie détermine une condition suffisante pour que le problème en domaine entièrement borné (borné des deux cotés) puisse être traité en connaissant la stabilité avec chacun des bords. On donne plusieurs exemples qui illustrent les difficultés en présence de valeurs propres généralisées.

L'étude numérique de stabilité est possible au travers de différentes approches (matrice Quasi-Toeplitz [1] d'amplification, opérateur sur $\ell^2(\mathbb{N})$,...). L'approche retenue s'appuie sur le calcul du déterminant de Kreiss-Lopatinskii. Un calcul d'indice complexe, s'appuyant sur ses propriétés d'holomorphie [2], permet de dénombrer les modes d'instabilités de bord du schéma.

[1] R. M. Beam, R. F. Warming. *The asymptotic spectra of banded Toeplitz and quasi-toeplitz matrices.* SIAM Journal on Scientific Computing, **14(4)**, 971–1006, 1993.

[2] J.-F. Coulombel. *Stability of Finite Difference Schemes for Hyperbolic Initial Boundary Value Problems.* Lectures Notes, 2011.

[3] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, A. Sundström. *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II.* Mathematics of Computation, **26(119)**, 649–649, 1972.

[4] F. Vilar, C.-W. Shu. *Development and stability analysis of the Inverse Lax Wendroff boundary treatment for central compact schemes.* ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **49(1)**, 39–67, 2015.

Contact : `pierre.le-barbenchon@univ-rennes1.fr`