Schémas *asymptotiques-preserving* appliqués aux problèmes hyperboliques avec termes sources de relaxation raide et application en physique des plasmas

Louis REBOUL, CMAP, Ecole polytechnique - Paris
Teddy PICHARD, CMAP, Ecole polytechnique - Paris
Marc MASSOT, CMAP, Ecole polytechnique - Paris

Certains systèmes d'équations fluides ou cinétiques en présence de (potentiellement multiples) petits paramètres admettent des régimes asymptotiques dans lesquels ils se réduisent à des jeux d'équations simplifiés ayant possiblement une structure mathématique différente. Un exemple typique de problème hyperbolique correspondant à ce genre de problématique est celui des équations d'Euler isentropique avec friction, qui admettent un régime asymptotique parabolique dans le cadre de dynamiques au temps long en présence de fortes frictions (voir par exemple l'introduction de [2]). Les approches classiques (HLL, Roe, etc) ne dégénèrent pas naturellement dans ces régimes asymptotiques vers des schémas numériques consistant avec les équations limites des systèmes concernés. En outre, bien que les conditions de stabilités des schémas classiques deviennent en général de plus en plus restrictives, leur précision au contraire peut être drastiquement réduite et les résultats obtenus fréquemment inexploitables. Les schémas dits *asymptotic-preserving* sont conçus précisément afin de non seulement lever les contraintes de stabilité restrictives mais aussi afin de conserver une précision uniforme dans tous les régimes asymptotiques. Les méthodes *asymptotic-preserving* d'ordre élevé présentes aujourd'hui dans la littérature ne considèrent pas le système d'Euler-friction mais plutôt des systèmes non-linéaires plus simples [1] ou ne sont pas strictement d'ordre élevé par rapport à la fois au temps et à l'espace [2, 3]. Nous introduisons un formalisme qui permet de concevoir une classe de schémas asymptotiques d'ordre 2 en temps et en espace applicable directement aux équations d'Euler-friction, ce qui constitue à notre connaissance une contribution nouvelle dans le domaine [5]. Ce nouveau type de méthode utilise un formalisme similaire à celui des schémas IMEX (voir par exemple [1]) permettant de rendre le schéma partiellement implicite, a la fois du point de vue du terme source et des flux. Les propriétés de stabilité et de précision uniformes dans tous les régimes sont démontrées pour des modèles linéaires, et validés numériquement dans le cas non linéaire. Les schémas développés ici ont également vocation à être étendu à termes à des applications comme les décharges de plasmas [4], où plusieurs petits paramètres interviennent (ratio de mass electrons-ions, longueur de Debye). Les performances des schémas ainsi obtenus seront illustrées par plusieurs cas tests numériques.

[1] G. Albi, G. Dimarco, L. Pareschi. *Implicit-explicit multistep methods for hyperbolic systems with multiscale relaxation.* SIAM Journal on Scientific Computing, **42(4)**, A2402–A2435, 2020.

[2] C. Berthon, R. Turpault. *Asymptotic preserving hll schemes.* Numerical methods for partial differential equations, **27(6)**, 1396–1422, 2011.

[3] C. Chalons, R. Turpault. *High-order asymptotic-preserving schemes for linear systems : Application to the goldstein–taylor equations.* Numerical Methods for Partial Differential Equations, **35(4)**, 1538–1561, 2019.

[4] L. Reboul, A. Alvarez-Laguna, T. Magin, P. Chabert, A. Bourdon, M. Massot. *Multifluid simulations of instabilities and sheath in low-temperature low-pressure plasmas : advanced numerical methods and comparison with pic.* VKI PhD symposium, preprint in preparation for Physics of Plasmas, 2021.

[5] L. Reboul, T. Pichard, M. Massot. *Second-order asymptotic-preserving schemes for nonlinear hyperbolic balance laws with stiff relaxation source terms.* in preparation for SIAM Journal on Scientific Computing, 2022.

Contact : `louis.reboul@polytechnique.edu`