



# Problèmes inverses régularisés par la variation totale : convergence dans un régime de faible bruit

---

Yohann De Castro, Vincent Duval, Romain Petit

CANUM, 14 Juin 2022

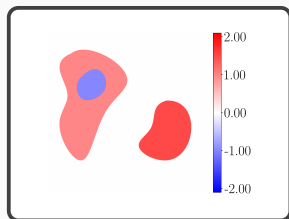


Image inconnue  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$

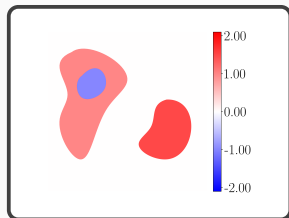
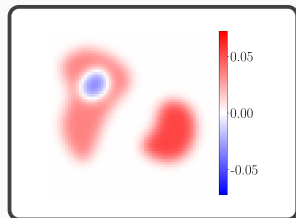


Image inconnue  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$



Observations  $y_0 = \Phi u_0 \in \mathbb{R}^m$

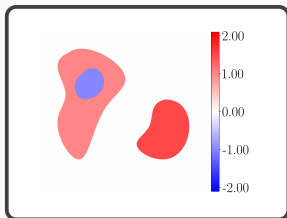
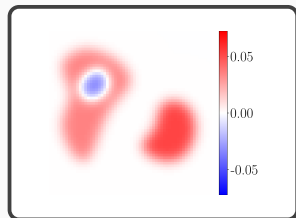


Image inconnue  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$



Observations  $y_0 = \Phi u_0 \in \mathbb{R}^m$

**Problème sans bruit**

Reconstruire  $u_0$  à partir de  $y_0$

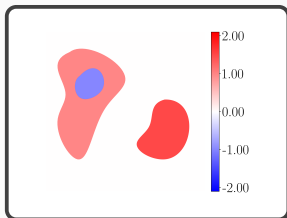
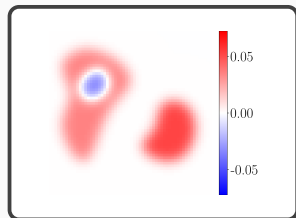


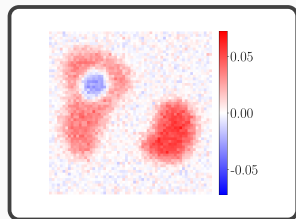
Image inconnue  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$



Observations  $y_0 = \Phi u_0 \in \mathbb{R}^m$

**Problème sans bruit**

Reconstruire  $u_0$  à partir de  $y_0$



Observations bruitées  $y = y_0 + w$

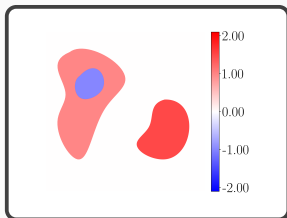
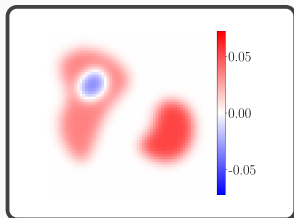


Image inconnue  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$



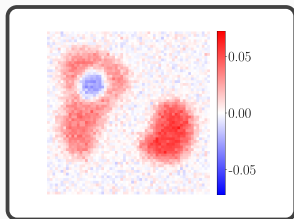
Observations  $y_0 = \Phi u_0 \in \mathbb{R}^m$

**Problème sans bruit**

Reconstruire  $u_0$  à partir de  $y_0$

**Problème avec bruit**

Reconstruire  $u_0$  à partir de  $y$



Observations bruitées  $y = y_0 + w$

Problème sans bruit : résoudre

$$\begin{array}{ll} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} & ?? \\ \text{s.t.} & \Phi u = y_0 \end{array} \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$

Problème sans bruit : résoudre

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad & \text{TV}(u) \\ \text{s.t.} \quad & \Phi u = y_0 \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$



Problème sans bruit : résoudre

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad & \text{TV}(u) \\ \text{s.t.} \quad & \Phi u = y_0 \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$

Variation totale (du gradient)

$$\text{TV}(u) = \sup \left\{ - \int_{\mathbb{R}^2} u \operatorname{div} \phi \mid \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \quad " = " \quad \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|$$

**Problème sans bruit : résoudre**

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad & \text{TV}(u) \\ \text{s.t.} \quad & \Phi u = y_0 \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$

**Problème avec bruit : résoudre**

$$\min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \frac{1}{2} \|\Phi u - y\|^2 + \lambda \text{TV}(u) \quad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

**Variation totale (du gradient)**

$$\text{TV}(u) = \sup \left\{ - \int_{\mathbb{R}^2} u \operatorname{div} \phi \mid \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \quad " = " \quad \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|$$

# Questions

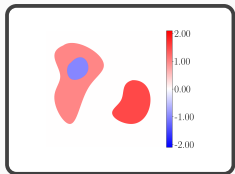
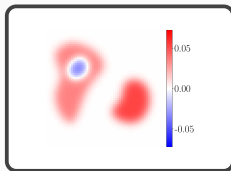
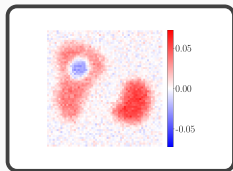


Image inconnue  $u_0$



Observations  $y_0 = \Phi u_0$



Obs. bruit.  $y = y_0 + w$

# Questions

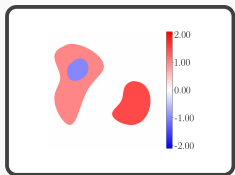
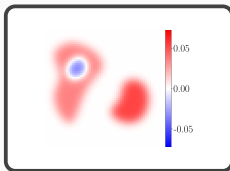
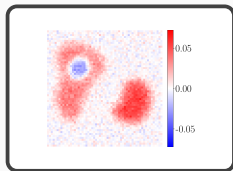


Image inconnue  $u_0$



Observations  $y_0 = \Phi u_0$



Obs. bruit.  $y = y_0 + w$

## Identifiabilité

$u_0$  unique solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  ?

# Questions

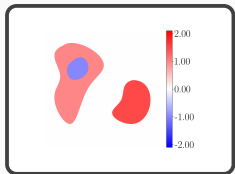
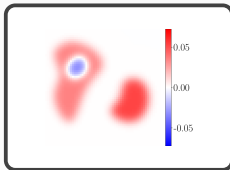
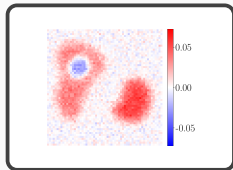


Image inconnue  $u_0$



Observations  $y_0 = \Phi u_0$



Obs. bruit.  $y = y_0 + w$

## Identifiabilité

$u_0$  unique solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  ?

Identifiabilité dans un cas particulier : [Bredies and Vicente, 2019]

# Questions

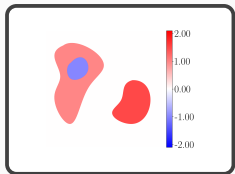
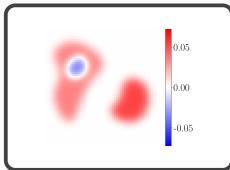
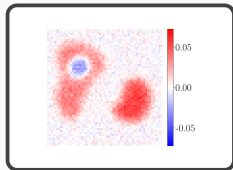


Image inconnue  $u_0$



Observations  $y_0 = \Phi u_0$



Obs. bruit.  $y = y_0 + w$

## Identifiabilité

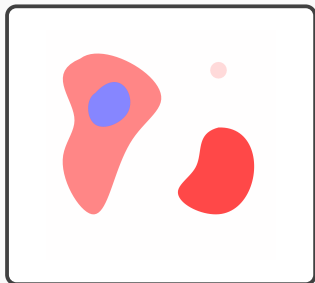
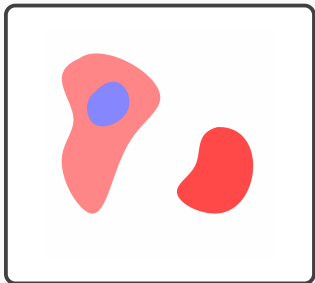
$u_0$  unique solution de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  ?

Identifiabilité dans un cas particulier : [Bredies and Vicente, 2019]

## Robustesse au bruit

Si  $w$  et  $\lambda$  petits, solutions de  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  proches des solutions de  $(\mathcal{P}_0(y_0))$  ?

# Quel type de convergence ?



# Un premier résultat

**Problème sans bruit : résoudre**

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad & \text{TV}(u) \\ \text{s.t.} \quad & \Phi u = y_0 \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$

**Problème avec bruit : résoudre**

$$\min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{TV}(u) + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi u - y\|^2 \quad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$



# Un premier résultat

**Problème sans bruit : résoudre**

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \quad & \text{TV}(u) \\ \text{s.t.} \quad & \Phi u = y_0 \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_0(y_0))$$

**Problème avec bruit : résoudre**

$$\min_{u \in L^2(\mathbb{R}^2)} \text{TV}(u) + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi u - y\|^2 \quad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

**Proposition** (voir par ex. [Hofmann et al., 2007])

Si  $u_0$  identifiable,  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\|w_n\|^2 = o(\lambda_n)$  alors  $u_n \rightarrow u_0$  fortement dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ , faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , et  $\text{TV}(u_n) \rightarrow \text{TV}(u_0)$

**Proposition** ([Chambolle et al., 2016, Iglesias et al., 2018])

Si  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\|w_n\|/\lambda_n \leq \sqrt{c_2} / (4 \|\Phi^*\|)$ , pour p.t.  $t \in \mathbb{R}$  (à extr. près) :

$$|U_n^{(t)} \Delta U_0^{(t)}| \rightarrow 0 \text{ et } \partial U_n^{(t)} \xrightarrow{\text{Hausdorff}} \partial U_0^{(t)} \text{ avec } U^{(t)} = \begin{cases} \{u \geq t\} & \text{si } t \geq 0 \\ \{u \leq t\} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition** ([Chambolle et al., 2016, Iglesias et al., 2018])

Si  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\|w_n\|/\lambda_n \leq \sqrt{c_2} / (4 \|\Phi^*\|)$ , pour p.t.  $t \in \mathbb{R}$  (à extr. près) :

$|U_n^{(t)} \Delta U_0^{(t)}| \rightarrow 0$  et  $\partial U_n^{(t)} \xrightarrow{\text{Hausdorff}} \partial U_0^{(t)}$  avec  $U^{(t)} = \begin{cases} \{u \geq t\} & \text{si } t \geq 0 \\ \{u \leq t\} & \text{sinon} \end{cases}$



## Condition d'optimalité "géométrique"

Si  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$  solution de  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  alors

$$\forall t > 0, \{u \geq t\} \in \underset{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty}{\text{Argmin}} P(E) - \int_E \eta_{\lambda,w}$$

$$\forall t < 0, \{u \leq t\} \in \underset{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty}{\text{Argmin}} P(E) + \int_E \eta_{\lambda,w}$$

pour un certain  $\eta_{\lambda,w} \in \text{Im}(\Phi^*)$

## Condition d'optimalité "géométrique"

Si  $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$  solution de  $(\mathcal{P}_\lambda(y))$  alors

$$\forall t > 0, \{u \geq t\} \in \underset{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty}{\text{Argmin}} P(E) - \int_E \eta_{\lambda,w}$$

$$\forall t < 0, \{u \leq t\} \in \underset{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty}{\text{Argmin}} P(E) + \int_E \eta_{\lambda,w}$$

pour un certain  $\eta_{\lambda,w} \in \text{Im}(\Phi^*)$

## Convergence des courbures

Si on a

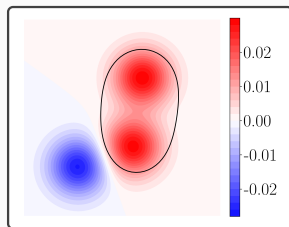
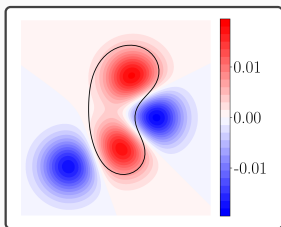
- $\text{Im}(\Phi^*) \cap \partial\text{TV}(0) \neq \emptyset$  (condition de source)
- $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\frac{\|w_n\|}{\lambda_n} \rightarrow 0$

alors  $(\eta_{\lambda_n, w_n})_{n \geq 0}$  converge fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$

# Le problème de la courbure prescrite

Problème

$$\min_{E \subset \mathbb{R}^2, |E| < +\infty} P(E) - \int_E \eta \quad (Q(\eta))$$



## Hypothèses

- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  et  $\eta$  dans  $\partial TV(0) \cap C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C_b^1(\mathbb{R}^2)$  vers  $\eta$

# Convergence des suites de minimiseurs

## Hypothèses

- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  et  $\eta$  dans  $\partial\text{TV}(0) \cap C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C_b^1(\mathbb{R}^2)$  vers  $\eta$

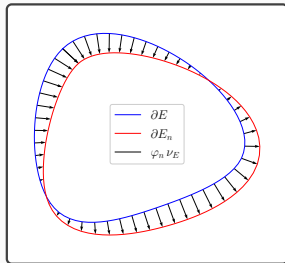
## Proposition

Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , toute sol.  $E_n$  de  $(Q(\eta_n))$  vérifie

$$E_n = (\text{Id} + \xi_n)(E)$$

avec  $E$  solution de  $(Q(\eta))$  et

$$\xi_n|_{\partial E} = \varphi_n \nu_E \quad \|\varphi_n\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon$$





# Convergence des suites de minimiseurs

## Hypothèses

- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  et  $\eta$  dans  $\partial \text{TV}(0) \cap C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C_b^1(\mathbb{R}^2)$  vers  $\eta$

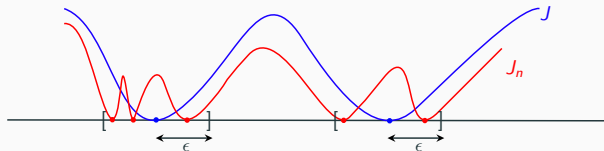
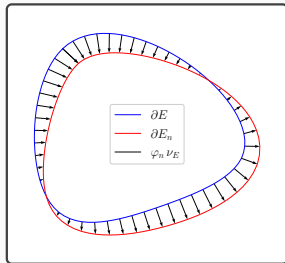
## Proposition

Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , toute sol.  $E_n$  de  $(Q(\eta_n))$  vérifie

$$E_n = (Id + \xi_n)(E)$$

avec  $E$  solution de  $(Q(\eta))$  et

$$\xi_n|_{\partial E} = \varphi_n \nu_E \quad \|\varphi_n\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon$$



## Hypothèses

- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  et  $\eta$  dans  $\partial\text{TV}(0) \cap C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C_b^1(\mathbb{R}^2)$  vers  $\eta$
- $E$  solution strictement stable de  $(\mathcal{Q}(\eta))$

# Résultat principal

## Hypothèses

- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  et  $\eta$  dans  $\partial\text{TV}(0) \cap C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C_b^1(\mathbb{R}^2)$  vers  $\eta$
- $E$  solution strictement stable de  $(Q(\eta))$

## Proposition

Il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour  $n$  assez grand, il existe au plus un  $\varphi_n$  tel que  $\|\varphi_n\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon$  et  $(Id + \xi_{\varphi_n})(E)$  sol. de  $(Q(\eta_n))$  avec  $\xi_{\varphi_n}|_{\partial E} = \varphi_n \nu_E$

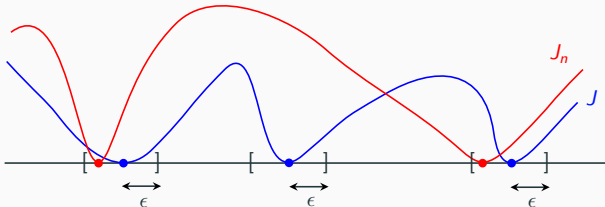
# Résultat principal

## Hypothèses

- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  et  $\eta$  dans  $\partial\text{TV}(0) \cap C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $(\eta_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $C_b^1(\mathbb{R}^2)$  vers  $\eta$
- $E$  solution strictement stable de  $(Q(\eta))$

## Proposition

Il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour  $n$  assez grand, il existe au plus un  $\varphi_n$  tel que  $\|\varphi_n\|_{C^2(\partial E)} \leq \epsilon$  et  $(Id + \xi_{\varphi_n})(E)$  sol. de  $(Q(\eta_n))$  avec  $\xi_{\varphi_n}|_{\partial E} = \varphi_n \nu_E$



## Hypothèses

- $u_0 = a \mathbf{1}_E$ ,  $E$  simple, unique sol. (non triviale) de  $(\mathcal{Q}(\eta_0))$ , strict. stable
- $\text{Im}(\Phi^*) \subset C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $\text{Im}(\Phi^*) \cap \partial\text{TV}(0) \neq \emptyset$  (condition de source)

## Hypothèses

- $u_0 = a \mathbf{1}_E$ ,  $E$  simple, unique sol. (non triviale) de  $(\mathcal{Q}(\eta_0))$ , strict. stable
- $\text{Im}(\Phi^*) \subset C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $\text{Im}(\Phi^*) \cap \partial\text{TV}(0) \neq \emptyset$  (condition de source)

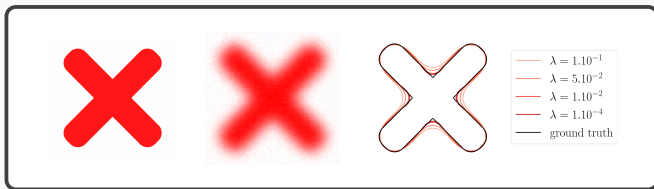
## Résultat

Si  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\frac{\|w_n\|}{\lambda_n} \rightarrow 0$ , pour  $n$  assez grand  $u_n = a_n \mathbf{1}_{E_n}$  avec

- $a_n \rightarrow a$
- $E_n = (Id + \xi_{\varphi_n})(E)$  et  $\|\varphi_n\|_{C^2(\partial E)} \rightarrow 0$

## Hypothèses

- $u_0 = a \mathbf{1}_E$ ,  $E$  simple, unique sol. (non triviale) de  $(\mathcal{Q}(\eta_0))$ , strict. stable
- $\text{Im}(\Phi^*) \subset C_b^1(\mathbb{R}^2)$
- $\text{Im}(\Phi^*) \cap \partial\text{TV}(0) \neq \emptyset$  (condition de source)



## Résultat

Si  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\frac{\|w_n\|}{\lambda_n} \rightarrow 0$ , pour  $n$  assez grand  $u_n = a_n \mathbf{1}_{E_n}$  avec

- $a_n \rightarrow a$
- $E_n = (\text{Id} + \xi_{\varphi_n})(E)$  et  $\|\varphi_n\|_{C^2(\partial E)} \rightarrow 0$

## Perspectives

- Images avec  $n \geq 2$  formes
- Condition de stabilité stricte vérifiée en pratique ?

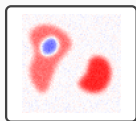


## Perspectives

- Images avec  $n \geq 2$  formes
- Condition de stabilité stricte vérifiée en pratique ?



$u_0$



$y = \Phi u_0 + w$



$u_{\lambda, w}$



$u_{\lambda, w} - u_0$



$Du_0, Du_{\lambda, w}$



Bredies, K. and Vicente, D. (2019).

**A perfect reconstruction property for PDE-constrained total-variation minimization with application in Quantitative Susceptibility Mapping.**

*ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 25:83.



Chambolle, A., Duval, V., Peyré, G., and Poon, C. (2016).

**Geometric properties of solutions to the total variation denoising problem.**

*Inverse Problems*, 33(1):015002.



Chambolle, A. and Lions, P.-L. (1997).

**Image recovery via total variation minimization and related problems.**

*Numerische Mathematik*, 76(2):167–188.

-  Hofmann, B., Kaltenbacher, B., Pöschl, C., and Scherzer, O. (2007).

**A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators.**

*Inverse Problems*, 23(3):987–1010.

-  Iglesias, J. A., Mercier, G., and Scherzer, O. (2018).

**A note on convergence of solutions of total variation regularized linear inverse problems.**

*Inverse Problems*, 34(5):055011.

-  Rudin, L. I., Osher, S., and Fatemi, E. (1992).

**Nonlinear total variation based noise removal algorithms.**

*Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1):259–268.