Une méthode de reconstruction pour un problème inverse géométrique en gravimétrie

Anthony Gerber-Roth

En collaboration avec **Alexandre Munnier & Karim Ramdani**

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Inria

CANUM
16 Juin 2022

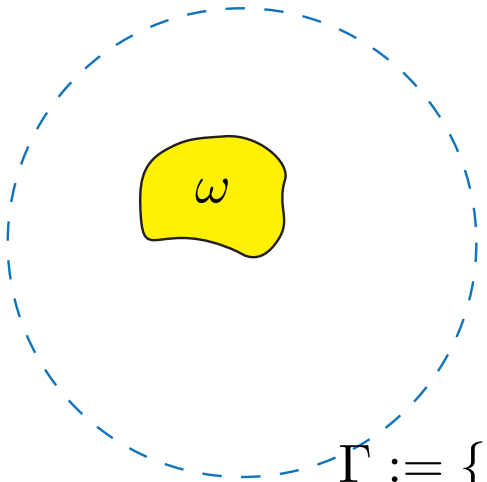
Plan

1. Formulation du problème étudié
2. Méthode de reconstruction
   - Etape 1 : Construction d'une formule de quadrature
   - Etape 2 : Construction d'un domaine de quadrature
3. Résultats numériques

Plan

1. Formulation du problème étudié
2. Méthode de reconstruction
   - Etape 1 : Construction d'une formule de quadrature
   - Etape 2 : Construction d'un domaine de quadrature
3. Résultats numériques

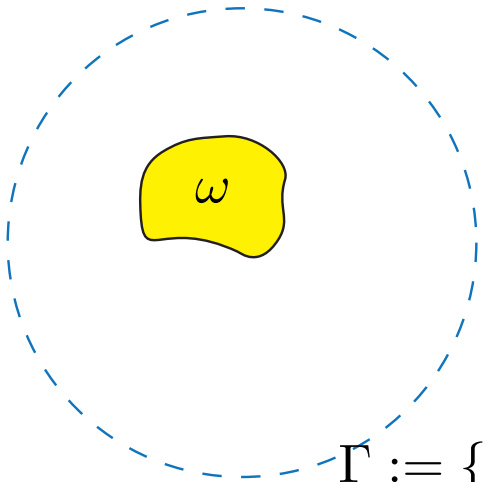
Modèle



Le potentiel gravitationnel u_ω généré par une densité de masse uniforme répartie sur ω vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega &= \mathbb{1}_\omega & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ u_\omega &= \mathcal{O}(\log|x|) & |x| \to +\infty. \end{cases}$$

Modèle



Le potentiel gravitationnel u_ω généré par une densité de masse uniforme répartie sur ω vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega &= \mathbb{1}_\omega & \text{sur } \mathbb{R}^2, \\ u_\omega &= \mathcal{O}(\log|x|) & |x| \to +\infty. \end{cases}$$

Problème inverse

Reconstruire ω connaissant u_ω (et ∇u_ω) sur Γ.

Unicité

Théorème [Isakov, 1990]

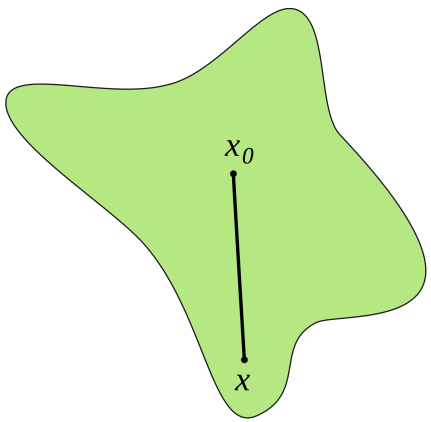
Si ω_1, ω_2 sont tous les deux

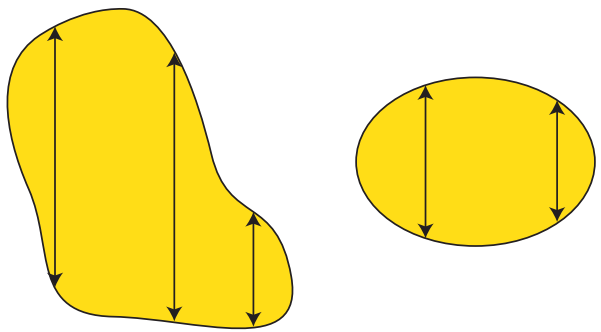
- étoilés par rapport à leur centre de gravité

ou

- convexes dans une direction

et si $\nabla u_{\omega_1} = \nabla u_{\omega_2}$ sur Γ, alors $\omega_1 = \omega_2$.





Stabilité

Soient $M, \rho_-, \rho_+, \alpha > 0$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des domaines étoilés ω de la forme

$$\omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - x_0| < \rho(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

Stabilité

Soient $M, \rho_-, \rho_+, \alpha > 0$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des domaines étoilés ω de la forme

$$\omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - x_0| < \rho(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

avec

$$\rho_- < \rho < \rho_+, \qquad \|\rho\|_{C^{0,2+\alpha}([0,2\pi])} \leqslant M.$$

Stabilité

Soient $M, \rho_-, \rho_+, \alpha > 0$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des domaines étoilés ω de la forme

$$\omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x - x_0| < \rho(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

avec

$$\rho_- < \rho < \rho_+, \qquad \|\rho\|_{C^{0,2+\alpha}([0,2\pi])} \leqslant M.$$

Théorème, [Isakov, 1990]

Il existe $C > 0$ tel que pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{U}$,

$$\|\nabla u_{\omega_1} - \nabla u_{\omega_2}\|_{L^\infty(\Gamma)} < \varepsilon \Rightarrow \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty([0,2\pi])} \leqslant C |\ln(\varepsilon)|^{-\frac{1}{C}}.$$

Principe de la méthode

On souhaite construire une suite de domaines (ω_N) tels que

$$\|\nabla u_\omega - \nabla u_{\omega_N}\|_\Gamma \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Principe de la méthode

On souhaite construire une suite de domaines (ω_N) tels que

$$\|\nabla u_\omega - \nabla u_{\omega_N}\|_\Gamma \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On parle de gravi-équivalence (asymptotique).

Principe de la méthode

D'après la formule de Green, si on connait u_ω et $\partial_n u_\omega := \nabla u_\omega \cdot n$ sur Γ, on connait pour toute fonction v :

$$\int_\Gamma u_\omega \, \partial_n v - \partial_n u_\omega \, v = \int_{\Omega_0} \Delta v \, u_\omega - \Delta u_\omega \, v.$$

Principe de la méthode

D'après la formule de Green, si on connait u_ω et $\partial_n u_\omega := \nabla u_\omega \cdot n$ sur Γ, on connait pour toute fonction v :

$$\int_\Gamma u_\omega \, \partial_n v - \partial_n u_\omega \, v = \int_{\Omega_0} \Delta v \, u_\omega - \Delta u_\omega \, v.$$

Si v est choisi tel que $\Delta v = 0$ (v harmonique), on connait donc

$$\int_\Gamma u_\omega \, \partial_n v - \partial_n u_\omega \, v = \int_\omega v.$$

Principe de la méthode

D'après la formule de Green, si on connait u_ω et $\partial_n u_\omega := \nabla u_\omega \cdot n$ sur Γ, on connait pour toute fonction v :

$$\int_\Gamma u_\omega \, \partial_n v - \partial_n u_\omega \, v = \int_{\Omega_0} \Delta v \, u_\omega - \Delta u_\omega \, v.$$

Si v est choisi tel que $\Delta v = 0$ (v harmonique), on connait donc

$$\int_\Gamma u_\omega \, \partial_n v - \partial_n u_\omega \, v = \int_\omega v.$$

Prenant les moments comme nouvelle mesure, on cherche à réaliser

$$\forall 0 \leqslant m \leqslant N, \quad \int_\omega z^m = \int_{\omega_N} z^m$$

Plan

1 Formulation du problème étudié

2 Méthode de reconstruction
- Etape 1 : Construction d'une formule de quadrature
- Etape 2 : Construction d'un domaine de quadrature

3 Résultats numériques

Méthode de reconstruction

Etape 1 Fixer $N \geqslant 1$, puis déterminer des poids $c_1, ..., c_N$ et des points $z_1, ..., z_N$ tels que :

$$\forall 0 \leqslant m \leqslant 2N-1, \quad \int_\omega z^m = \sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m.$$

Méthode de reconstruction

Etape 1 Fixer $N \geqslant 1$, puis déterminer des poids $c_1, ..., c_N$ et des points $z_1, ..., z_N$ tels que :

$$\forall 0 \leqslant m \leqslant 2N-1, \quad \int_{\omega} z^m = \sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m.$$

Etape 2 A partir de $c_1, ..., c_N$ et $z_1, ..., z_N$, construire ω_N tel que

$$\forall m \geqslant 0, \quad \int_{\omega_N} z^m = \sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m.$$

Etape 1 : Formule de quadrature

Etant donné les quantités

$$\tau_m = \int_\omega z^m,$$

on doit résoudre le système d'équations (non linéaires) de la forme

$$\forall 0 \leqslant m \leqslant 2N-1, \quad \sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m = \tau_m,$$

C'est un système de Prony.

Méthode de Prony

- Si les (z_n) sont connus, les (c_n) sont solutions d'un système de Vandermonde :

$$\mathbb{V}(z)\mathbf{c} = \boldsymbol{\tau}$$

Méthode de Prony

- Si les (z_n) sont connus, les (c_n) sont solutions d'un système de Vandermonde :

$$\mathbb{V}(z)\mathbf{c} = \boldsymbol{\tau}$$

- les (z_n) sont les valeurs propres du problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathbb{T}_1\mathbf{x} = z\,\mathbb{T}_0\mathbf{x},$$

où

$$\mathbb{T}_0 = \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{N-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{N-1} & \tau_N & \cdots & \tau_{2N-2} \end{pmatrix} \quad \mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_N \\ \tau_2 & \tau_3 & \cdots & \tau_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_N & \tau_{N+1} & \cdots & \tau_{2N-1} \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Domaine de quadrature

Etant donné des poids $c_1, ..., c_N$ et des points $z_1, ..., z_N$, construire ω_N vérifiant

$$\forall m \geqslant 0, \quad \int_{\omega_N} z^m = \sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m.$$

Ceci conduit à la notion de **domaines de quadrature**.

Etape 2 : Domaine de quadrature

Définition

Ω est un domaine de quadrature[1] *(harmonique) s'il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction harmonique v :*

$$\int_\Omega v = \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

1. *"What is a quadrature domain ?"*, Björn Gustafsson and Harold S. Shapiro, 2005.

Etape 2 : Domaine de quadrature

Définition

Ω est un domaine de quadrature[1] *(harmonique) s'il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction harmonique v :*

$$\int_\Omega v = \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

1. *"What is a quadrature domain ?"*, Björn Gustafsson and Harold S. Shapiro, 2005.

Non unicité : En général, les noeuds z_n et poids c_n ne caractérisent pas un domaine de quadrature (il peut exister deux domaines distincts correspondants aux mêmes poids et points).

Domaines de quadrature

Définition

Un domaine Ω est un domaine de quadrature (sous-harmonique) si il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction sous-harmonique v (i.e, $-\Delta v \leqslant 0$) :

$$\int_\Omega v \geqslant \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

Domaines de quadrature

Définition

Un domaine Ω est un domaine de quadrature (sous-harmonique) si il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction sous-harmonique v (i.e, $-\Delta v \leqslant 0$) :

$$\int_\Omega v \geqslant \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

v harmonique $\Rightarrow$

Domaines de quadrature

Définition

Un domaine Ω est un domaine de quadrature (sous-harmonique) si il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction sous-harmonique v (i.e, $-\Delta v \leqslant 0$) :

$$\int_\Omega v \geqslant \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

v harmonique $\Rightarrow$ $v, -v$ sous-harmoniques $\Rightarrow$

Domaines de quadrature

Définition

Un domaine Ω est un domaine de quadrature (sous-harmonique) si il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction sous-harmonique v (i.e, $-\Delta v \leqslant 0$) :

$$\int_\Omega v \geqslant \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

v harmonique $\Rightarrow$ $v, -v$ sous-harmoniques $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_\Omega v = \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$

Domaines de quadrature

Définition

Un domaine Ω est un domaine de quadrature (sous-harmonique) si il existe des points $(z_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ dans Ω et des coefficients $(c_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tels que pour toute fonction sous-harmonique v (i.e, $-\Delta v \leqslant 0$) :

$$\int_\Omega v \geqslant \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$$

v harmonique $\Rightarrow$ $v, -v$ sous-harmoniques $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_\Omega v = \sum_{n=1}^{N} c_n v(z_n).$

Un domaine de quadrature sous-harmonique est donc bien un cas particulier de domaine de quadrature harmonique et **l'unicité** est alors garantie.

Construction de domaine de quadrature

Si Ω est un domaine de quadrature sous-harmonique (associé aux poids (c_n) et aux noeuds (z_n)), la fonction

$$U_\Omega(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Omega \ln|x-y| \, \mathrm{d}y$$

détermine Ω, car :

$$\mathbb{1}_\Omega = -\Delta U_\Omega.$$

Construction de domaine de quadrature

On peut montrer que U_Ω est l'unique minimiseur de la fonctionnelle (convexe) :

$$\mathcal{E}(v) := \int_B \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v \right),$$

Construction de domaine de quadrature

On peut montrer que U_Ω est l'unique minimiseur de la fonctionnelle (convexe) :

$$\mathcal{E}(v) := \int_B \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v \right),$$

sur le convexe,

$$K := \{ v \in H^1(B) \,|\, v \leqslant G_N \text{ dans } B;\ v = G_N \text{ sur } \partial B \},$$

Construction de domaine de quadrature

On peut montrer que U_Ω est l'unique minimiseur de la fonctionnelle (convexe) :

$$\mathcal{E}(v) := \int_B \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v \right),$$

sur le convexe,

$$K := \{ v \in H^1(B) \,|\, v \leqslant G_N \text{ dans } B;\ v = G_N \text{ sur } \partial B \},$$

où $G_N(x) := -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n \ln |x - z_n|$.

Construction de domaine de quadrature

On peut montrer que U_Ω est l'unique minimiseur de la fonctionnelle (convexe) :

$$\mathcal{E}(v) := \int_B \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v \right),$$

sur le convexe,

$$K := \{ v \in H^1(B) \,|\, v \leqslant G_N \text{ dans } B;\ v = G_N \text{ sur } \partial B \},$$

où $G_N(x) := -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n \ln |x - z_n|$.

Construction de Ω : Calculer U_Ω (par éléments finis) puis en déduire Ω en calculant numériquement son Laplacien.

Algorithme

1. Choisir $N \geqslant 1$.
2. Pour $0 \leqslant m \leqslant 2N-1$, calculer $\int_\omega z^m$ à partir des mesures.

Algorithme

1. Choisir $N \geqslant 1$.
2. Pour $0 \leqslant m \leqslant 2N-1$, calculer $\int_\omega z^m$ à partir des mesures.
3. **Etape 1 :** Calculer par la méthode de Prony les (z_n) et (c_n) tels que

$$\sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m = \int_\omega z^m, \qquad \forall 0 \leqslant n \leqslant 2N-1.$$

Algorithme

1. Choisir $N \geqslant 1$.
2. Pour $0 \leqslant m \leqslant 2N-1$, calculer $\int_\omega z^m$ à partir des mesures.
3. **Etape 1 :** Calculer par la méthode de Prony les (z_n) et (c_n) tels que
$$\sum_{n=1}^{N} c_n z_n^m = \int_\omega z^m, \qquad \forall 0 \leqslant n \leqslant 2N-1.$$
4. **Etape 2 :** Déterminer l'unique domaine de quadrature sous-harmonique ω_N associé à (z_n) et (c_n).

Convergence

Théorème

- Si ω est un domaine de quadrature sous-harmonique, il existe N tel que

$$\omega_N = \omega.$$

Convergence

Théorème

- Si ω est un domaine de quadrature sous-harmonique, il existe N tel que

$$\omega_N = \omega.$$

- Si il existe un compact K de B tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \omega_N \subset K,$$

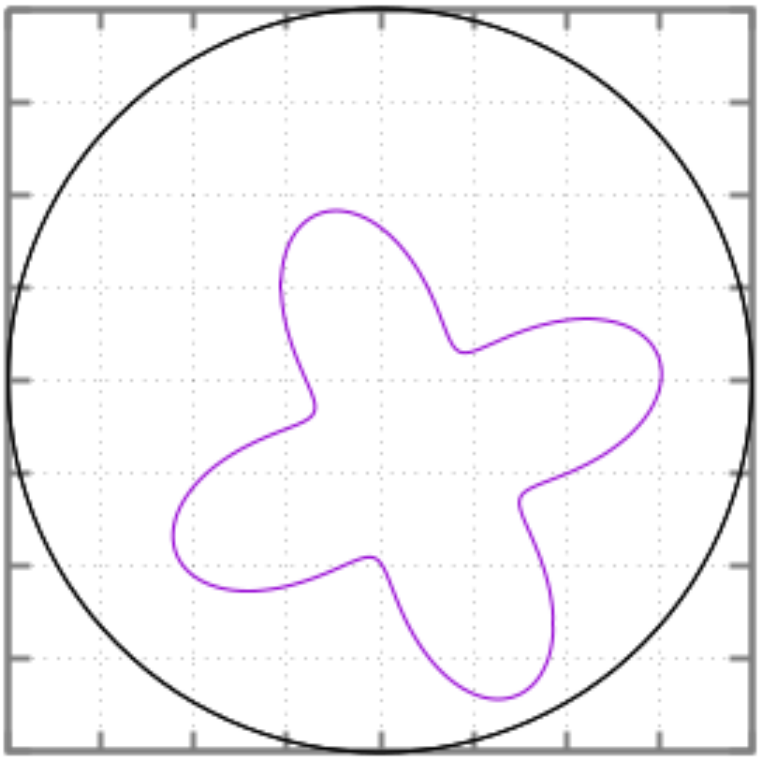
alors, il existe une sous suite de $(\omega_N)_N$ telle que

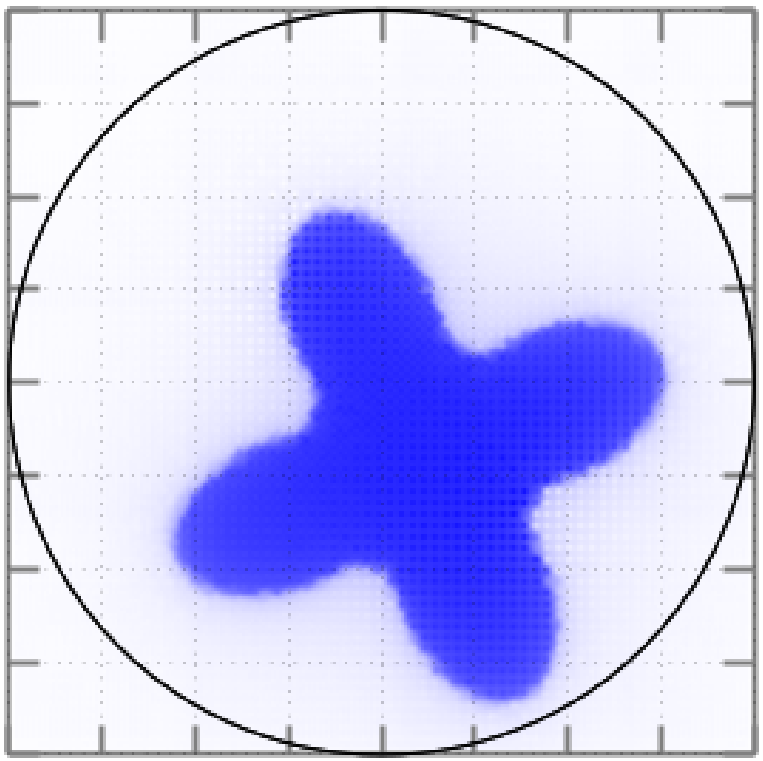
$$\|u_{\omega_N} - u_\omega\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Plan

1. Formulation du problème étudié
2. Méthode de reconstruction
   - Etape 1 : Construction d'une formule de quadrature
   - Etape 2 : Construction d'un domaine de quadrature
3. Résultats numériques

Résultats numériques

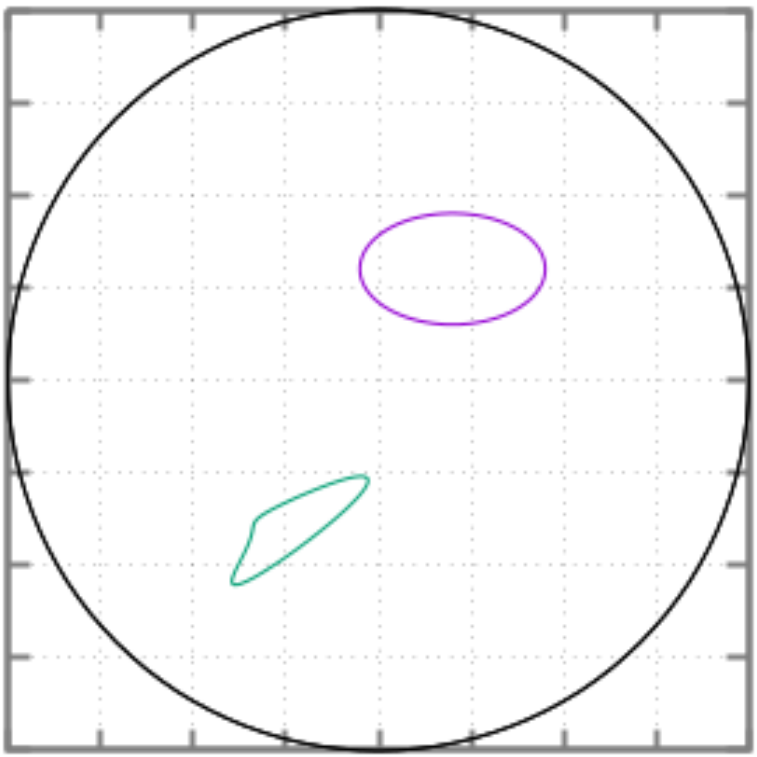


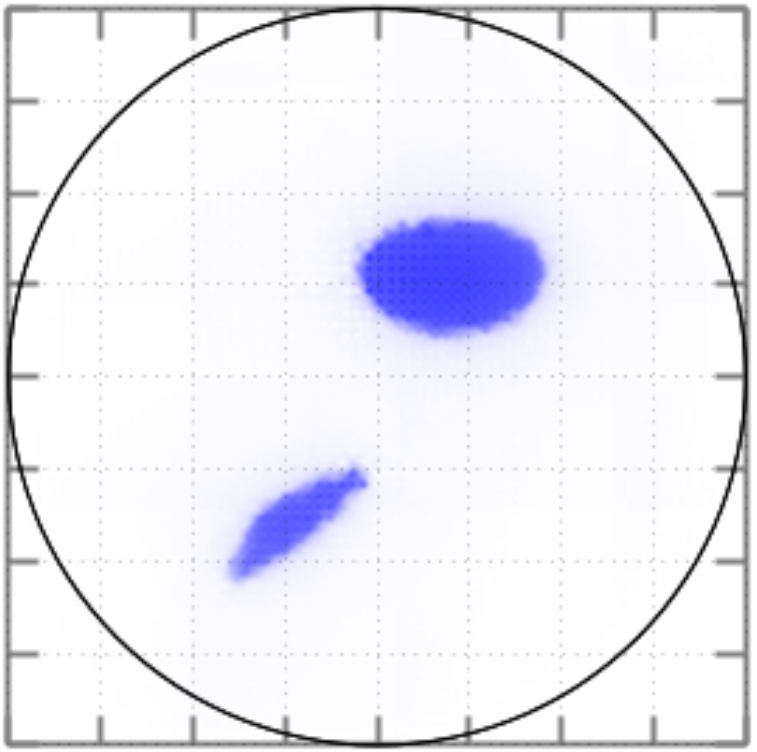


Reconstruction * d'un domaine étoilé, $N = 15$.

∗. Calculs effectués avec FreeFEM++

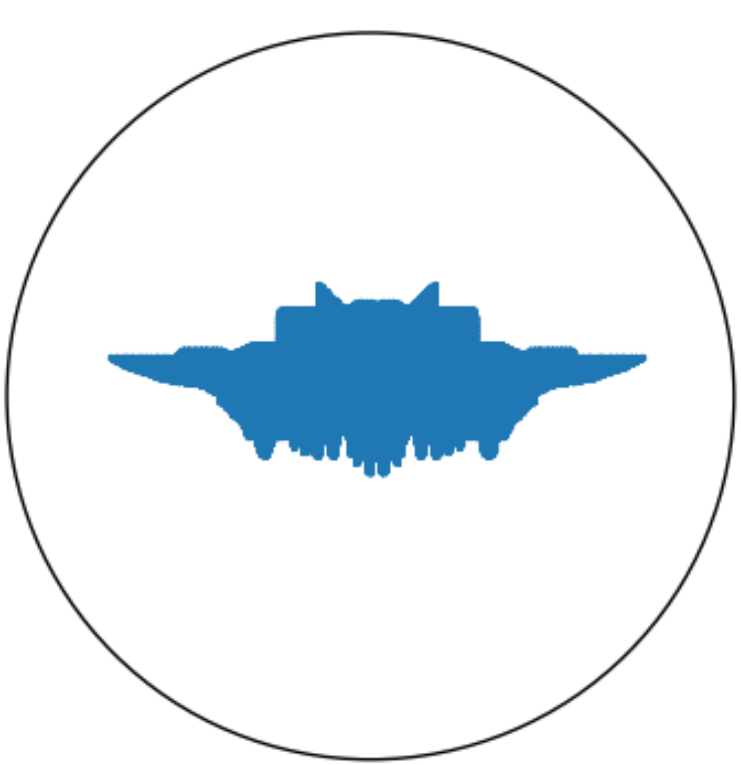
Résultats Numériques

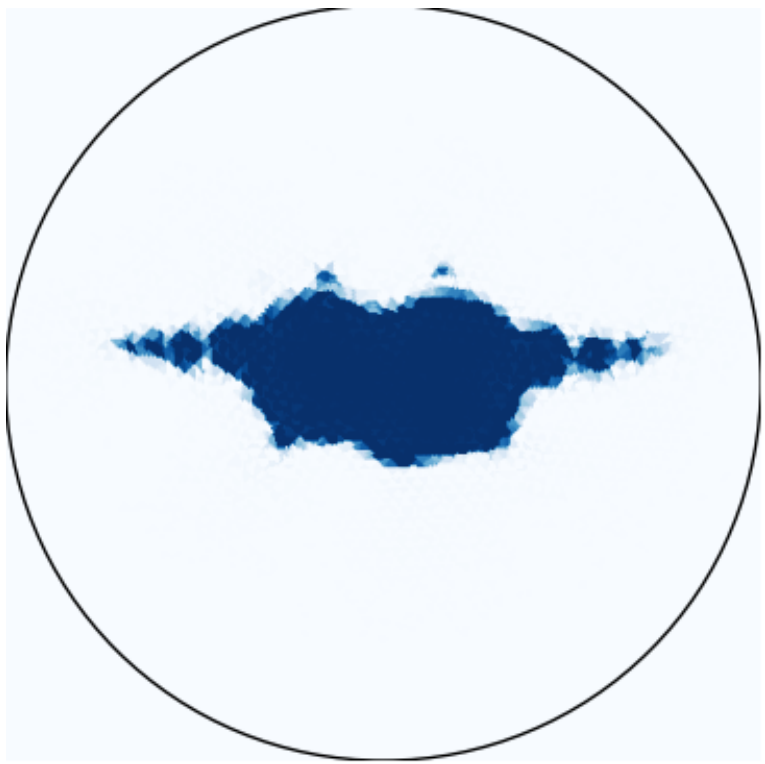




Reconstruction d'un domaine non connexe (mais convexe en x_1) avec $N = 26$.

Résultats Numériques





Reconstruction d'un domaine plus complexe, $N = 29$. †

†. https://opengameart.org/content/space-ship-construction-kit

Conclusion

- Méthode de reconstruction originale basée sur la méthode de Prony et la construction de domaines de quadrature
- Et maintenant ?
  - Distribution de masse de la forme : $f\,\mathbb{1}_\omega$
  - Cas 3D
  - Tomographie par impédance électrique (EIT) : détection de cavités pour le problème de Calderón (Méthode de Prony+domaines de quadrature surfaciques)

Construction de domaine de quadrature

U_Ω peut être vu comme l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta U_\Omega \leqslant 1 & (\Omega_0) \\ U_\Omega = G_N & (\partial\Omega_0) \\ U_\Omega \leqslant G_N & (\Omega_0), \end{cases}$$

Exemples

- Les disques sont les seuls domaines de quadrature pour $N = 1$, d'après la formule de la moyennne :

$$v(a) = \frac{1}{|D(a,\rho)|} \int_{D(a,\rho)} v.$$

Autres exemples...

Solving Prony's system

$$P(Z) := \prod_{n=1}^{N} (Z - z_n) = Z^N + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n Z^n.$$

$$\begin{cases}
c_1 & + & c_2 & + & \dots & + & c_N & = & \tau_0 \\
c_1 z_1 & + & c_2 z_2 & + & \dots & + & c_N z_N & = & \tau_1 \\
c_1 z_1^2 & + & c_2 z_2^2 & + & \dots & + & c_N z_N^2 & = & \tau_2 \\
 & & & & \vdots & & & = & \vdots \\
c_1 z_1^{N-1} & + & c_2 z_2^{N-1} & + & \dots & + & c_N z_N^{N-1} & = & \tau_{N-1} \\
c_1 z_1^{N} & + & c_2 z_2^{N} & + & \dots & + & c_N z_N^{N} & = & \tau_{N} \\
 & & & & \vdots & & & = & \vdots \\
c_1 z_1^{2N-1} & + & c_2 z_2^{2N-1} & + & \dots & + & c_N z_N^{2N-1} & = & \tau_{2N-1}
\end{cases}$$

Solving Prony's system

$$P(Z) := \prod_{n=1}^{N} (Z - z_n) = Z^N + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n Z^n.$$

$$\begin{cases}
c_1 + c_2 + \dots + c_N = \tau_0 & \times \alpha_0 \\
c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_N z_N = \tau_1 & \times \alpha_1 \\
c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_N z_N^2 = \tau_2 & \times \alpha_2 \\
\vdots \quad = \quad \vdots & \\
c_1 z_1^{n-1} + c_2 z_2^{n-1} + \dots + c_N z_N^{N-1} = \tau_{N-1} & \times \alpha_{N-1} \\
c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_N z_N^N = \tau_N & \times 1 \\
\vdots \quad = \quad \vdots & \\
c_1 z_1^{2N-1} + c_2 z_2^{2N-1} + \dots + c_N z_N^{2N-1} = \tau_{2N-1} &
\end{cases}$$

$$c_1 P(z_1) + c_2 P(z_2) + \dots + c_N P(z_N) =$$

$$\alpha_0 \tau_0 + \alpha_1 \tau_1 + \dots + \dots + \alpha_{N-1} \tau_{N-1} + \tau_N$$

Solving Prony's system

$$P(Z) := \prod_{n=1}^{N} (Z - z_n) = Z^N + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n Z^n.$$

$$\begin{cases}
c_1 + c_2 + \dots + c_N = \tau_0 & \\
c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_N z_N = \tau_1 & \times \alpha_0 \\
c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_N z_N^2 = \tau_2 & \times \alpha_1 \\
\vdots \quad = \quad \vdots & \\
c_1 z_1^{N-1} + c_2 z_2^{N-1} + \dots + c_N z_N^{N-1} = \tau_{N-1} & \times \alpha_{N-2} \\
c_1 z_1^{N} + c_2 z_2^{N} + \dots + c_N z_N^{N} = \tau_{N} & \times \alpha_{N-1} \\
c_1 z_1^{N+1} + c_2 z_2^{N+1} + \dots + c_N z_N^{N+1} = \tau_{N+1} & \times 1 \\
\vdots \quad = \quad \vdots & \\
c_1 z_1^{2N-1} + c_2 z_2^{2N-1} + \dots + c_N z_N^{2N-1} = \tau_{2N-1} &
\end{cases}$$

$$c_1 z_1 P(z_1) + \dots + c_n z_n P(z_n) = \alpha_0 \tau_1 + \alpha_1 \tau_2 + \dots + \dots + \alpha_{n-1} \tau_n + \tau_{n+1}$$

$$\alpha_0 \tau_1 + \alpha_1 \tau_2 + \dots + \dots + \alpha_{n-1} \tau_n = -\tau_{n+1}.$$

Solving Prony's system

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_n & \cdots & \tau_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tau_n \\ \tau_{n+1} \\ \vdots \\ \tau_{2n-1} \end{pmatrix} \iff \mathbb{T}_0 \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\tau}'.$$