

Contrôlabilité de l'équation de la chaleur sous contrainte de positivité

Jérôme LOHÉAC, CRAN - Nancy

Il est bien connu que l'équation de la chaleur est contrôlable vers un état stationnaire en tout temps $T > 0$, cf. [1, 2, 3]. Il est aussi classique que sans contrôle, grâce au principe de comparaison, si l'état initial est positif alors la solution reste positive pour tous les temps $t \geq 0$.

Dans cet exposé, nous regarderons s'il est possible de contrôler l'équation de la chaleur, tout en préservant la positivité de la solution. À l'aide du principe de comparaison, nous ramènerons ce problème de contrôlabilité sous contrainte d'état en un problème de contrôlabilité avec une contrainte sur le contrôle. Plus précisément, nous allons nous ramener à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec un contrôle Dirichlet positif. Nous montrerons alors que la contrôlabilité de ce dernier problème ne peut avoir lieu qu'à partir d'un temps suffisamment grand et ne peut avoir lieu en un temps arbitrairement petit. En d'autres termes il existe un temps minimal de contrôlabilité strictement positif. Nous montrerons que ce temps minimal est atteint avec des contrôles qui sont pris dans l'espace des mesures de Radon positives. De plus, dans le cas de l'équation de la chaleur 1D, nous montrerons que ce contrôle est une somme dénombrable de masses de Dirac.

Les résultats présentés dans cet exposé sont issus de [4, 5, 6].

- [1] O. Y. Èmanuilov. *Controllability of parabolic equations*. Sb. Math., **186(6)**, 879–900, 1995. doi : 10.1070/SM1995v186n06ABEH000047.
- [2] H. O. Fattorini, D. L. Russell. *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*. Arch. Ration. Mech. Anal., **43**, 272–292, 1971. doi :10.1007/BF00250466.
- [3] A. V. Fursikov, O. Y. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, vol. 34. Seoul : Seoul National Univ., 1996.
- [4] J. Lohéac. *Nonnegative boundary control of 1D linear heat equations*. Vietnam J. Math., **49(3)**, 845–870, 2021. doi :10.1007/s10013-021-00497-5.
- [5] J. Lohéac, E. Trélat, E. Zuazua. *Minimal controllability time for the heat equation under unilateral state or control constraints*. Math. Models Methods Appl. Sci., **27(9)**, 1587–1644, 2017. doi : 10.1142/S0218202517500270.
- [6] J. Lohéac, E. Trélat, E. Zuazua. *Nonnegative control of finite-dimensional linear systems*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, **38(2)**, 301–346, 2021. doi :10.1016/j.anihpc.2020.07.004.