Plasticité parfaite: du calcul des variations aux équations hyperboliques

Jean-François BABADJIAN, LMO, Université Paris Saclay - Orsay

Cet exposé sera consacré à la description d'un modèle de plasticité parfaite en mécanique des solides permettant d'expliquer l'apparition de déformations permanentes dans un milieu élastique. La présentation se voudra relativement générale et aura essentiellement pour but de décrire le modèle mécanique ainsi que les principaux résultats d'existence mélangeant à la fois des méthodes du calcul des variations et des équations hyperboliques.

Les milieux plastiques sont caractérisés par l'existence dans l'espace des forces d'un convexe d'élasticité, noté K, dans lequel le tenseur des contraintes σ est astreint à demeurer. Si σ se trouve à l'intérieur de K, le milieu se comporte de façon purement élastique ; si en revanche σ atteint le bord de K, un flot plastique commence à se développer et des déformations permanentes (ou plastiques) apparaissent. Le tenseur des contraintes engendre une déformation élastique $e = \mathbf{A}^{-1}\sigma$ (où $\mathbf{A}$ est la loi de Hooke du milieu) qui contrairement à l'élasticité n'est pas égale au tenseur des déformations linéarisées $e(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$ (u est le champ des déplacements). Le défaut d'égalité $p := e(u) - e$ correspond exactement aux déformations plastiques dont le flot est régi par une loi d'écoulement. Celle-ci stipule que le taux de déformations plastiques est orienté suivant le cône normal au convexe K en σ, i.e. $\dot{p} \in N_K(\sigma)$.

Etant donné $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert désignant la configuration de référence d'un milieu élasto-plastique, le modèle standard d'élasto-plasticité parfaite en petites déformations consiste à rechercher un triplet $(u, e, p) : \Omega \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{M}^{n\times n}_{\text{sym}} \times \mathbf{M}^{n\times n}_{\text{sym}}$ ($\mathbf{M}^{n\times n}_{\text{sym}}$ désigne l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ symétriques) satisfaisant le système d'équations :

$$\begin{cases} e(u) = e + p & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ \sigma = \mathbf{A}e \in K & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ \ddot{u} - \text{div}\sigma = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ \dot{p} \in N_K(\sigma) & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}^+, \\ + \text{ conditions limites et initiales.} \end{cases}$$

Nous nous attacherons à décrire une formulation faible de ce problème et régimes stationnaires, quasi-statiques et dynamiques dans l'espace d'énergie où la loi d'écoulement est interprétée comme un bilan d'énergie qui n'est autre qu'une reformulation de l'inégalité de Clausius-Duhem correspondant à la seconde loi de la thermomécanique. Nous présenterons également une formulation alternative du problème dynamique pour une certaine classe de conditions limites en terme de système de Friedrichs sous contrainte convexe pour laquelle il est possible de montrer le caractère bien posé de solutions entropiques.

Les travaux présentés sont le fruit de diverses collaborations avec V. Crismale (Rome), G. Francfort (Paris Nord), A. Giacomini (Brescia) R. Llerena (Vienne), C. Mifsud, M. G. Mora (Pavie), N. Seguin (Rennes).

Contact : `jean-francois.babadjian@universite-paris-saclay.fr`