Stabilité de l'approximation des solutions de l'équation de Helmholtz par ondes planes évanescentes

Emile PAROLIN, Università di Pavia - Pavie, Italie
Daan HUYBRECHS, KU Leuven - Louvain, Belgique
Andrea MOIOLA, Università di Pavia - Pavie, Italie

Les solutions de l'équation de Helmholtz ($-\Delta u - k^2 u = 0$) peuvent être approchées sous la forme d'une superposition d'ondes planes *propagatives* $\mathbf{x} \mapsto e^{\imath k \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$, avec une direction unitaire de propagation $\mathbf{d}$ prenant des valeurs réelles. Cette observation est par exemple à l'origine du succès des méthodes de Trefftz [3]. Cependant, lorsque le nombre d'ondes planes devient trop grand, ces méthodes deviennent instables numériquement. Ceci est dû à la présence de coefficients exponentiellement grands dans la combinaison linéaire, dès lors que la solution approchée présente des composantes hautes-fréquences dans le domaine de Fourier. Malheureusement cette instabilité numérique peut fortement limiter l'efficacité et la pertinence de la méthode d'approximation.

Dans ce travail [4], un résultat essentiel a été d'établir que les solutions de l'équation de Helmholtz dans le disque peuvent être exactement représentées sous forme intégrale comme la superposition continue d'ondes planes *évanescentes*, généralisant ainsi la représentation de Herglotz standard. Une onde plane évanescente dans ce contexte indique une onde plane $\mathbf{x} \mapsto e^{\imath k \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$ avec une direction de propagation $\mathbf{d}$ prenant des valeurs *complexes*, mais qui est toujours solution de l'équation de départ si $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 1$. Le module de l'onde plane est alors exponentiellement décroissant dans la direction orthogonale à la direction de propagation et permet d'enrichir l'espace d'approximation de contenu haute-fréquence dans le domaine de Fourier. Nous démontrons de plus que l'opérateur qui associe à chaque solution de l'équation de Helmholtz sa densité de Herglotz dans la représentation intégrale est bijectif et continu. Ce résultat au niveau continu démontre l'intérêt des ondes planes évanescentes pour obtenir des représentations stables en pratique.

Avec l'objectif de construire des espaces d'approximation de dimension finie, nous nous sommes également intéressés à la discrétisation des représentations intégrales des solutions de l'équation de Helmholtz. Nous proposons une procédure numérique permettant de construire des ensembles d'ondes planes évanescentes adéquates, à l'aide de méthodes d'échantillonnage dans le domaine paramétrique dans l'esprit des travaux récents [2]. L'échantillonnage se fait suivant une densité de probabilité dont nous donnons une expression explicite. En utilisant des techniques de régularisation et de sur-échantillonnage [1], les approximations par moindres carrés ainsi construites sont précises et stables numériquement, comme un grand nombre d'expériences numériques l'ont confirmé.

[1] B. Adcock, D. Huybrechs. *Frames and numerical approximation II : Generalized sampling.* J. Fourier Anal. Appl., **26(6)**, Paper No. 87, 34, 2020. doi :10.1007/s00041-020-09796-w.

[2] A. Cohen, G. Migliorati. *Optimal weighted least-squares methods.* SMAI J. Comput. Math., **3**, 181–203, 2017. doi :10.5802/smai-jcm.24.

[3] R. Hiptmair, A. Moiola, I. Perugia. *A survey of Trefftz methods for the Helmholtz equation.* In *Building bridges : connections and challenges in modern approaches to numerical partial differential equations*, vol. 114 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pp. 237–278. Springer, [Cham], 2016.

[4] E. Parolin, D. Huybrechs, A. Moiola. *Stable approximation of helmholtz solutions by evanescent plane waves.* arXiv preprint arXiv:2202.05658, 2022.

Contact : `emile.parolin@unipv.it`