Calculs de modes dans un guide d'ondes ouvert

A. Leclerc, A. Tonnoir, H. Barucq, M. Duruflé et C. Gout
Contact : augustin.leclerc@insa-rouen.fr

1. Motivation

L'étude de la propagation des **ondes électromagnétiques** (EM) est essentielle pour considérer l'**impact des technologies humaines sur l'environnement**. Par exemple, l'énergie des éoliennes offshore est transportée par des câbles dynamiques dont les blindages empêchent une grande partie des ondes d'irradier en dehors du câble [1]. Néanmoins, aucun matériau n'est parfait, et une part significative peut en fuiter. Ainsi, notre but est de regarder leur diffusion dans l'eau salée.

2. Problème modal

On considère comme modèle l'**équation d'Helmholtz** :

$$-\Delta U - \rho\,\omega^2 U = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 \qquad (1)$$

où ω est la pulsation et $\rho = \rho(x,y) \geq \rho_- > 0$ est **invariant en** z. On suppose de plus qu'il y a une constante ρ_∞ telle que $\rho - \rho_\infty$ est à **support compact** dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, et $\mathcal{C}$ désigne son support. On notera aussi $\rho_+ = ||\rho||_\infty$.

On cherche des **solutions modales** de la forme $U(x,y,z) = u(x,y)e^{i\beta z}$ où $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et dont $\beta \in \mathbb{C}$ est la valeur propre. Une telle décomposition est possible car le domaine est un guide d'ondes (invariant en z). Cela nous mène au **problème aux valeurs propres** suivant :

$$-\Delta_{x,y} u - (\rho\,\omega^2 - \beta^2)u = 0 \ \text{ dans } \mathbb{R}^2 \qquad (2)$$

où $\Delta_{x,y} = \partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2}$ est le Laplacien transverse. On peut démontrer le lemme suivant [2] :

Lemme 1 Si la fonction u est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors $\beta^2 \in \omega^2[\rho_-, \rho_+]$.

4. Résolution analytique

On se place dans le cas où $\rho = \rho_+$ est constant sur le disque $\mathcal{C}$ et on cherche les modes u purement radiaux. En appliquant la **condition de radiation** (3), on déduit alors que :

$$u = \begin{cases} \alpha_0\, J_0(r\sqrt{\rho_+\omega^2 - \beta^2}) & \text{dans} \quad \mathcal{C}, \\ \alpha_1\, H_0^{(1)}(r\sqrt{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{C}, \end{cases}$$

où J_0 est la **fonction de Bessel** de première espèce d'ordre 0 et où $H_0^{(1)}$ est la **fonction de Hankel** de première espèce d'ordre 0.

Comme $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, la solution u et sa dérivée normale doivent être continues sur $\partial\mathcal{C}$. On peut alors trouver les coefficients et la valeur propre β qui satisfont toutes ces conditions pour un mode u (non nul).

3. Conditions aux bords

On montre qu'une solution u de (2) satisfait la **condition de radiation** (Sommerfeld) suivante :

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial r} - i\sqrt{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}\, u = 0, \qquad \text{où } r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (3)$$

On peut approcher cette condition en l'imposant à distance finie sur un bord circulaire $\partial\Omega$ dont le disque induit Ω contient le domaine $\mathcal{C}$. Cela nous mène à réduire (2) sur Ω en fixant la **condition aux limites aborbantes** (CLA) suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} - i\sqrt{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}\, u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (4)$$

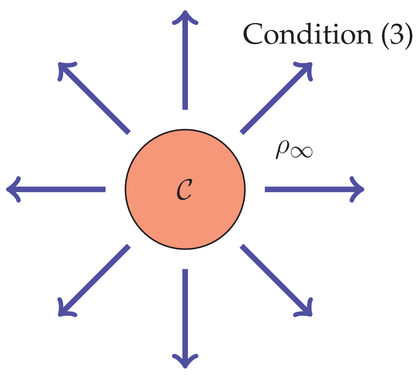


Schéma du problème avec la condition de radiation de Sommerfeld

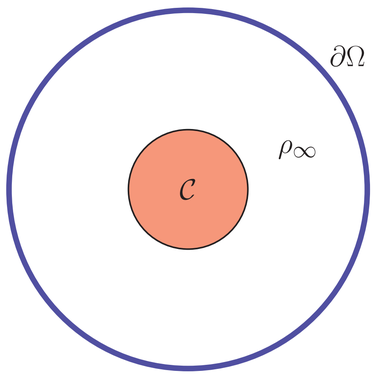


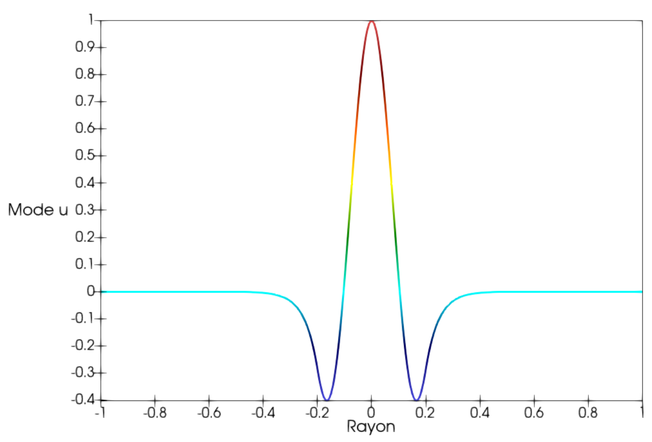
Schéma du problème sur lequel on impose une CLA

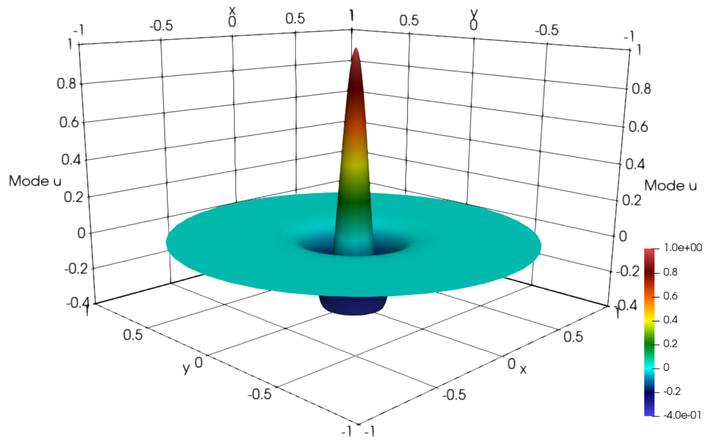
Le problème devient alors **non-linéaire par rapport à sa valeur propre**, ce qui nous mène à approcher une nouvelle fois cette condition. Voici 3 conditions qui approchent (4) :

- $\dfrac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} - i\omega\sqrt{\rho_\infty - \rho^+}\, u|_{\partial\Omega} = 0$
- $\dfrac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} + \left(-\dfrac{\varepsilon_0}{2} + \dfrac{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}{2\,\varepsilon_0}\right) u|_{\partial\Omega} = 0$
- $\dfrac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} + \left(-\dfrac{\varepsilon_0}{4} + \dfrac{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}{4\,\varepsilon_0}\right) u|_{\partial\Omega} + (\rho_\infty\omega^2 - \beta^2)v = 0$, où $u|_{\partial\Omega} = \left(\varepsilon_0 + \dfrac{\beta^2 - \rho_\infty\omega^2}{\varepsilon_0}\right) v$

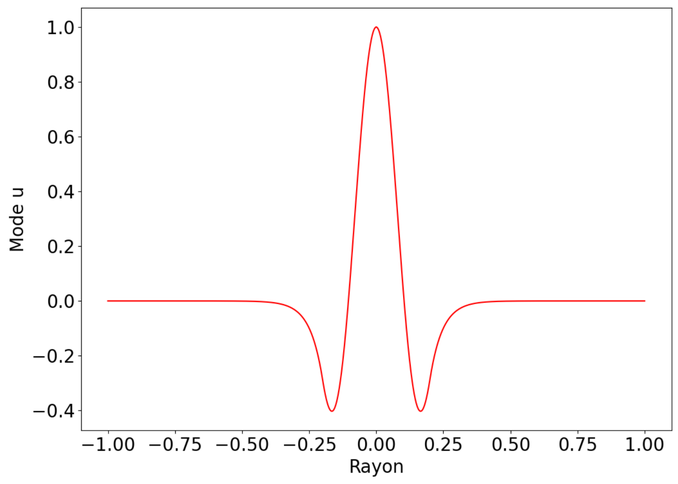
La première CLA se trouve en considérant que $\beta^2 \sim \rho^+\omega^2$. Pour les deux suivantes, on utilise les deux premières étapes de l'**algorithme de Newton-Raphson** appliqué à $i\sqrt{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}$, que l'on peut initialiser en prenant la première CLA proposée.

5. Résultats





Mode numérique u_{num} calculé avec la deuxième CLA pour un rayon de Ω de 1



Mode analytique u_{an} avec la condition de radiation à l'infini

Les simulations présentées ont été réalisées avec $\rho = 10$ sur $\mathcal{C}$ (disque centré de rayon 0.2), $\rho_\infty = 1$ et $\omega = 10$.

En maillant finement, l'**erreur relative** $e_r = \dfrac{||u_{\text{num}} - u_{\text{an}}||_{L^2(\Omega)}}{||u_{\text{an}}||_{L^2(\Omega)}}$ est de l'ordre de $3\cdot10^{-6}$ pour la deuxième CLA (appliquée à des rayons du domaine Ω supérieurs à 0.5).

Références

[1] HARSANYI, Petra, et al. The Effects of Anthropogenic Electromagnetic Fields (EMF) on the Early Development of Two Commercially Important Crustaceans, European Lobster, Homarus gammarus (L.) and Edible Crab, Cancer pagurus (L.). Journal of Marine Science and Engineering, 2022, vol. 10, no 5, p. 564.

[2] A.-S. Bonnet-BenDhia, S. Fliss, C. Hazard, A. Tonnoir, A Rellich type theorem for the Helmholtz equation in a conical domain, C. R. A. S. Paris Ser. I 354 (2016), 27– 32.