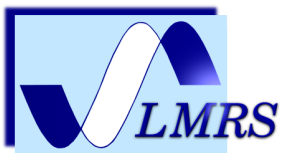
Volumes finis et solutions renormalisées pour un problème elliptique à donnée L^1 avec conditions de Neumann

Mirella AOUN et Olivier GUIBÉ

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
Université de Rouen Normandie

45eme Congrès National d'Analyse Numérique

16 Juin 2022



Objectif

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u) = f & \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$f \in L^1(\Omega)$.

Objectif

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u) = f & \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$f \in L^1(\Omega)$.

1. Existence de solution approchée par la méthode des volumes finis.
2. Existence et unicité de la solution renormalisée à médiane nulle.

Objectif

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u) = f & \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$f \in L^1(\Omega)$.

1. Existence de solution approchée par la méthode des volumes finis.
2. Existence et unicité de la solution renormalisée à médiane nulle.

Objectif :

Solution V-F $\longrightarrow$ Solution renormalisée.

convergence.

Plan

1. Solutions renormalisées
2. Volumes finis et outils d'analyse discrète
3. Résultat de convergence

Outline

1. Solutions renormalisées
2. Volumes finis et outils d'analyse discrète
3. Résultat de convergence

Équation elliptique non linéaire à donnée L^1

On considère Ω un ouvert borné, connexe et polygonal de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$). On étudie le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u) = f & \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

avec $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire.

- La fonction v est dans $\left(L^p(\Omega)\right)^d$ avec $2 < p < +\infty$ si $d = 2$, $p = d$ si $d \geq 3$,
- λ est une fonction continue telle que $0 < \mu \leq \lambda(r) \leq \lambda_\infty$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

On considère $f \in L^1(\Omega)$ qui satisfait la condition de compatibilité

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = 0.$$

Donnée L^1

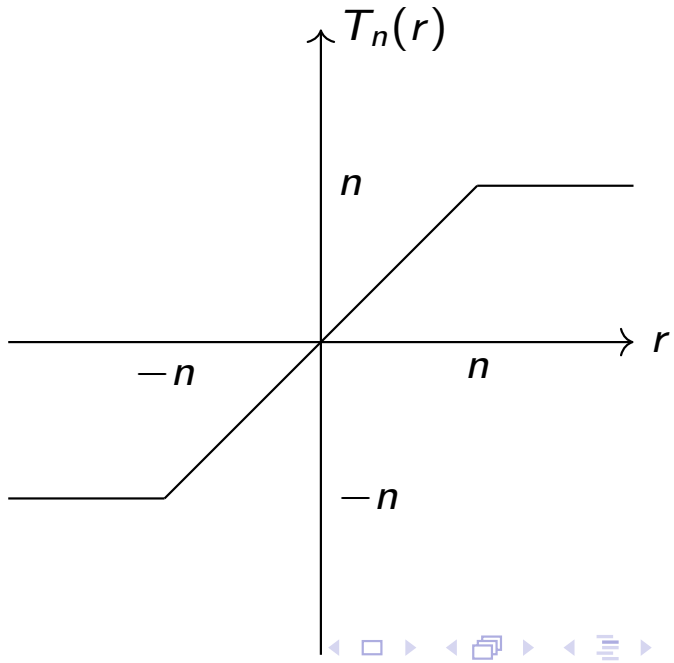
- $f \in L^1(\Omega)$, pas de solution variationnelle : $\int_\Omega fv$ peut ne pas exister pour $v \in H^1(\Omega)$.
- Solution au sens des distributions : A.Prignet(1997)(conditions aux limites non homogènes, moyenne nulle). En général $\notin$ espace sobolev, pas d'unicité ou stabilité.
- Un cadre adéquat : SOLA, solutions entropiques, solutions renormalisées [DiPerna et Lions(1989, équations de Boltzmann)], etc.

Donnée L^1

- $f \in L^1(\Omega)$, pas de solution variationnelle : $\int_\Omega fv$ peut ne pas exister pour $v \in H^1(\Omega)$.
- Solution au sens des distributions : A.Prignet(1997)(conditions aux limites non homogènes, moyenne nulle). En général $\notin$ espace sobolev, pas d'unicité ou stabilité.
- Un cadre adéquat : SOLA, solutions entropiques, solutions renormalisées [DiPerna et Lions(1989, équations de Boltzmann)], etc.

L'outil principal est :
$T_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n > 0$,

$$T_n(r) = \begin{cases} -n, & \text{if } r \leq -n \\ r, & \text{if } -n \leq r \leq n \\ n, & \text{if } r \geq n. \end{cases}$$



Définition 1: Solutions renormalisées

Une fonction réelle u définie sur Ω est une solution renormalisée de l'équation (1) si :

1. u est mesurable et finie p.p sur Ω,
2. $\forall n > 0,\ T_n(u) \in H^1(\Omega)$,
3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{x\in\Omega, |u(x)|<n\}} \lambda(u)|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$
4. $\forall h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact, $\forall \varphi \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega h(u)\lambda(u)\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega h'(u)\lambda(u)\varphi\nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega uh(u)\boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega uh'(u)\varphi\boldsymbol{v} \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi h(u) \,\mathrm{d}x.$$

Conditions de Neumann

Le cas des conditions de type Neumann est peu abordé dans la littérature L^1 par rapport au cas Dirichlet : difficulté supplémentaire dans les estimations sur les tronquées et Poincaré-Wirtinger

- Choisir la moyenne : lien compliqué entre moyenne de la fonction et moyenne des tronquées, la moyenne peut ne pas exister.
- Choisir la médiane : l'avantage d'être définie pour toute fonction mesurable, ce qui n'est pas le cas de la moyenne, $T_n(u)$ est à médiane nulle dès que u est à médiane nulle. Mais la médiane n'est pas linéaire.

Médiane

- Si u est une fonction mesurable, on définit la médiane de u par l'ensemble des réels t tels que

$$\text{mes}\{x \in \Omega : u(x) > t\} \leq \frac{\text{mes}(\Omega)}{2},$$
$$\text{mes}\{x \in \Omega : u(x) < t\} \leq \frac{\text{mes}(\Omega)}{2}.$$

- On note $\underline{\text{med}}(u)$ et $\overline{\text{med}}(u)$:

$$\underline{\text{med}}(u) = \inf\left\{t \in \mathbb{R} : \text{meas}\{x \in \Omega : u(x) > t\} \leq \frac{\text{meas}(\Omega)}{2}\right\},$$
$$\overline{\text{med}}(u) = \sup\left\{t \in \mathbb{R} : \text{meas}\{x \in \Omega : u(x) > t\} \geq \frac{\text{meas}(\Omega)}{2}\right\}.$$

Médiane

- Si u est une fonction mesurable, on définit la médiane de u par l'ensemble des réels t tels que

$$\text{mes}\{x \in \Omega : u(x) > t\} \leq \frac{\text{mes}(\Omega)}{2},$$
$$\text{mes}\{x \in \Omega : u(x) < t\} \leq \frac{\text{mes}(\Omega)}{2}.$$

- On note $\underline{\text{med}}(u)$ et $\overline{\text{med}}(u)$:

$$\underline{\text{med}}(u) = \inf\left\{t \in \mathbb{R} : \text{meas}\{x \in \Omega : u(x) > t\} \leq \frac{\text{meas}(\Omega)}{2}\right\},$$
$$\overline{\text{med}}(u) = \sup\left\{t \in \mathbb{R} : \text{meas}\{x \in \Omega : u(x) > t\} \geq \frac{\text{meas}(\Omega)}{2}\right\}.$$

- La $\text{med}(u)$ est un intervalle, compact non-vide. Mais pour Ω connexe et $u \in H^1(\Omega)$, $\text{med}(u) = \underline{\text{med}}(u) = \overline{\text{med}}(u)$.

Existence et unicité

Dans ce cas on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (W.P Ziemer, 1989) avec médiane :

Soit $u \in H^1(\Omega)$, $\exists C > 0$

$$\|u - \text{med}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

avec C une constante qui dépend de d et Ω.

Existence et unicité

Dans ce cas on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (W.P Ziemer, 1989) avec médiane :

Soit $u \in H^1(\Omega)$, $\exists C > 0$

$$\|u - \text{med}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

avec C une constante qui dépend de d et Ω.

- Betta-Guibé-Mercaldo (2015) : existence pour une classe générale d'opérateurs à croissance p non coercifs, médiane nulle, f dans L^1 à moyenne nulle, solution renormalisée et en 2019 : unicité de la solution avec des hypothèses supplémentaires, cas variationnel, cas L^1, solution renormalisée, médiane nulle.

Avec ces deux résultats il y a existence et unicité de la solution renormalisée à médiane nulle de notre problème (1).

Outline

1 Solutions renormalisées

2 Volumes finis et outils d'analyse discrète

3 Résultat de convergence

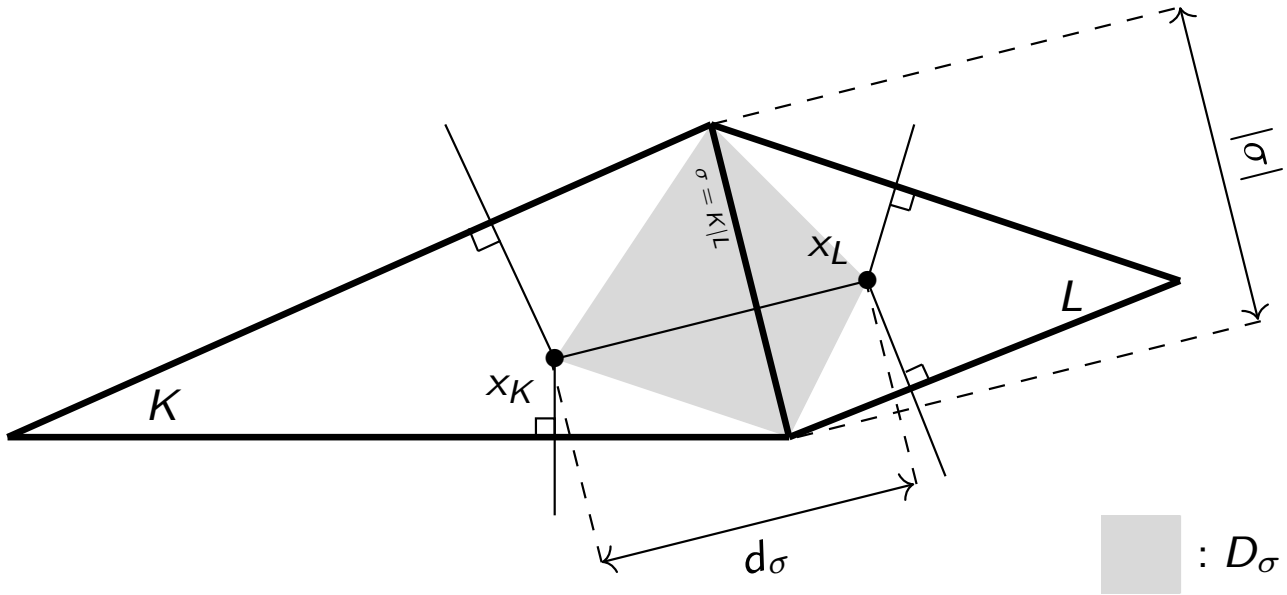
Méthode des volumes finis

Soit Ω un ouvert borné, connexe et polygonal de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u) = f & \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(u)\nabla u + \boldsymbol{v}u) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

avec $f \in L^1(\Omega)$ tel que $\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = 0$.

- K, L des volumes de contrôle.
- σ les arêtes de ces volumes.
- $h_{\mathcal{T}} = \sup_{K \in \mathcal{T}} \operatorname{diam}(K)$.
- $|D_\sigma| = \frac{1}{d} d_\sigma |\sigma|$.



$$\exists \xi > 0 \text{ tel que } d(x_K, \sigma) \geq \xi d_\sigma \quad \forall K \in \mathcal{T} \text{ et } \forall \sigma \in \mathcal{E}_K. \tag{3}$$

Schéma V-F

Soit $\mathcal{M}$ maillage admissible. Pour $K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}(K)$, on définit $\boldsymbol{v}_{K,\sigma} = \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, \mathrm{d}x$,

Schéma V-F

$$\forall K \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}(K)} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} \lambda(u)_\sigma (u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}(K)} |\sigma| \boldsymbol{v}_{K,\sigma} u_{\sigma,+} = \int_K f \, \mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \ u_{\sigma,+} = u_K \text{ si } \boldsymbol{v}_{K,\sigma} \geq 0, \ u_{\sigma,+} = u_L \text{ sinon.} \tag{5}$$

tel que $u_{\sigma,-}$ satisfait $\{u_{\sigma,+}, u_{\sigma,-}\} = \{u_K, u_L\}$.
Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$,

$$\forall \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int}, \ \min[\lambda(u_K), \lambda(u_L)] \leq \lambda(u)_\sigma \leq \max[\lambda(u_K), \lambda(u_L)], \tag{6}$$

avec $\lambda(u)_\sigma$ est par exemple la valeur moyenne de $\lambda(u_K)$ et $\lambda(u_L)$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$.

Littératures V-F et choix

- Cas variationnel L^2 (Neumann), avec moyenne : Chainais-Hillairet, Droniou (2008, Finite volume schemes for non-coercive elliptic problems with Neuman boundary conditions).
- Donné mesure (Dirichlet) : Droniou, Gallouët et Herbin (2003, A finite volume scheme for a noncoercive elliptic equation with measure data).
- Donné L^1 (Dirichlet) : Leclavier (2017, Finite volume scheme and renormalized solutions for a noncoercive elliptic problem with L^1 data).

Inégalité Poincaré-Wirtinger médiane discrète

- Livre de W.P. Ziemer (weakly differentiable functions, 1989)
- Bessemoulin-Chatard, Chainais-Hillairet, Filbet (2014, On discrete functional inequalities for some finite volume schemes)

Proposition 1: Inégalité de Poincaré-Wirtinger médiane Discrète [M.A, O. G [1]]

Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible. Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, $\exists C > 0$ qui dépend uniquement de Ω, d et de p tels que

$$\|u - c\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\xi^{1/2}} |u|_{1,2,\mathcal{M}}, \qquad \forall u \in X(\mathcal{T}). \tag{7}$$

où $X(\mathcal{T})$ désigne les fonctions constantes sur chaque volume de contrôle et $|\cdot|_{1,2,\mathcal{T}}$ la semi-norme discrète H^1 avec $c \in \text{med}(u)$.

Remarque : La médiane est un intervalle compact $[\underline{\text{med}}(u), \overline{\text{med}}(u)]$.

Outline

1 Solutions renormalisées

2 Volumes finis et outils d'analyse discrète

3 Résultat de convergence

Existence et Convergence

Théorème 1: Existence [M.A, O.G]

Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible satisfaisant (3). Alors il existe $u_{\mathcal{T}} = (u_K)_{k\in\mathcal{M}}$ solution de (4) telle que $\underline{\text{med}}(u_{\mathcal{T}}) = 0$.

Théorème 2: Convergence [M.A, O.G]

Soit $(\mathcal{M}_m)_{m\geqslant 1}$ une suite de maillages admissibles tels qu'il existe $\xi > 0$ satisfaisant (3) et tel que $h_{\mathcal{T}_m} \to 0$. Soit $u_m = (u_K^m)_{K\in\mathcal{T}_m}$ solution de (4) telle que $\underline{\text{med}}(u_m) = 0$. Alors u_m converge vers l'unique solution renormalisée u à médiane nulle de (2), lorsque $m \to \infty$, dans le sens

$$u_m \text{ converge vers } u \text{ p.p. dans } \Omega,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \nabla_{\mathcal{M}_m} T_n(u_m) \text{ converge vers } \nabla T_n(u), \text{ faible dans } (L^2(\Omega))^d.$$

Estimation à priori

Proposition : Estimations sur $\ln(1+|u_{\mathcal{M}}|)$ avec $\underline{\text{med}}(u_{\mathcal{M}})=0$

Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible satisfaisant (3). Si $u_{\mathcal{M}}=(u_K)_{K\in\mathcal{T}}$ est une solution de (4), telle que $\underline{\text{med}}(u_{\mathcal{M}})=0$, alors

$$\|\ln(1+|u_{\mathcal{M}}|)\|^2_{1,2,\mathcal{M}} \leq C\left(2\|f\|_{L^1(\Omega)}+d|\Omega|^{\frac{p-2}{p}}\|\boldsymbol{v}\|^2_{(L^p(\Omega))^d}\right), \quad (8)$$

où $C=C(\Omega,\mu,\beta,p,\xi)$ est une constante positive.

En appliquant le théorème du point fixe de Brouwer on a : Existence d'une solution pour notre schéma (4) telle que $\underline{\text{med}}(u_{\mathcal{T}})=0$.

Estimations sur $T_n(u_{\mathcal{M}})$

Proposition : Estimations sur $T_n(u_{\mathcal{M}})$

Soit $\mathcal{M}$ un maillage admissible. Si $u_{\mathcal{M}} = (u_K)_{K\in\mathcal{T}} \in \mathcal{X}(\mathcal{T})$ est une solution de(4) avec $\underline{\text{med}}(u_{\mathcal{T}}) = 0$, alors

$$\exists C > 0,\ \|T_n(u_{\mathcal{T}})\|_{1,2,\mathcal{T}} \leq C, \quad \forall n > 0.$$

Pour $(\mathcal{M}_m)_{m\geqslant 1}$ une suite de maillages admissibles et $u_m = (u_K^m)_{K\in\mathcal{T}_m} \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_m)$ solution de (4), il $\exists u$ une fonction mesurable finie p.p telle que, à une sous-suite près,

$$T_n(u_m) \to T_n(u) \text{ fort dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p }, \tag{9}$$

$$\nabla_{\mathcal{M}_m} T_n(u_m) \rightharpoonup \nabla T_n(u) \text{ dans } (L^2(\Omega))^d,\ \forall n > 0, \tag{10}$$

$$T_n(u) \in H^1(\Omega),\ \forall n > 0 \text{ et } \text{med}(u) = 0. \tag{11}$$

Version discrète de la décroissance à l'infini de l'énergie tronquée

Proposition :

Soit $(\mathcal{M}_m)_{m\geqslant 1}$ une suite de maillages admissibles. Soient $u_m = (u_K^m)_{K\in\mathcal{T}_m} \in \mathcal{X}(\mathcal{T})_m$ une solution (4) avec $\underline{\text{med}}(u_m) = 0$ et u une fonction mesurable p.p. dans Ω alors

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\lim_{h_{\mathcal{M}_m}\to 0}} \frac{1}{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} \lambda(u_m)_\sigma (u_K^m - u_L^m)(T_n(u_K^m) - T_n(u_L^m)) = 0 \tag{12}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\lim_{h_{\mathcal{M}_m}\to 0}} \frac{1}{n} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} |\sigma|\,|\boldsymbol{v}_{K,\sigma}|\,|u_{\sigma,+}^m|\,|T_n(u_{\sigma,+}^m) - T_n(u_{\sigma,-}^m)| = 0. \tag{13}$$

Passage à la limite

On multiplie le schéma (4) par une version discrète de la fonction test $(\varphi h(u))$ de la formulation renormalisée : $\varphi(x_K)h_n(u_K^m)$.
Difficulté : par rapport au cas continue, ne permet pas de tronquer toute l'équation.

$$T = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} \lambda(u_m)_\sigma h_n(u_K^m)\,(u_K^m - u_L^m)\,(\varphi(x_K) - \varphi(x_L))$$

En passant à la limite lorsque $h_{\mathcal{M}_m} \to 0$ et après $n \to \infty$ on obtient

$$\int_\Omega h(u)\lambda(u)\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega h'(u)\lambda(u)\varphi\nabla u \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega uh(u)\boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega uh'(u)\varphi\boldsymbol{v} \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi h(u) \,\mathrm{d}x.$$

qui est la formulation renormalisée.

Merci pour votre attention.

Aoun, M., and Guibé, O.
Finite volume scheme and renormalized solutions for nonlinear elliptic neumann problem with l1 data, 2022.