Maillages d'ordre élevé : adaptation basée sur la minimisation numérique de l'erreur d'interpolation et validité

Lucien Rochery & **Adrien Loseille**

Équipe-projet GAMMA, Inria Saclay

13-17/06/2022

45ème Congrès d'Analyse Numérique, CANUM 2020, 2022

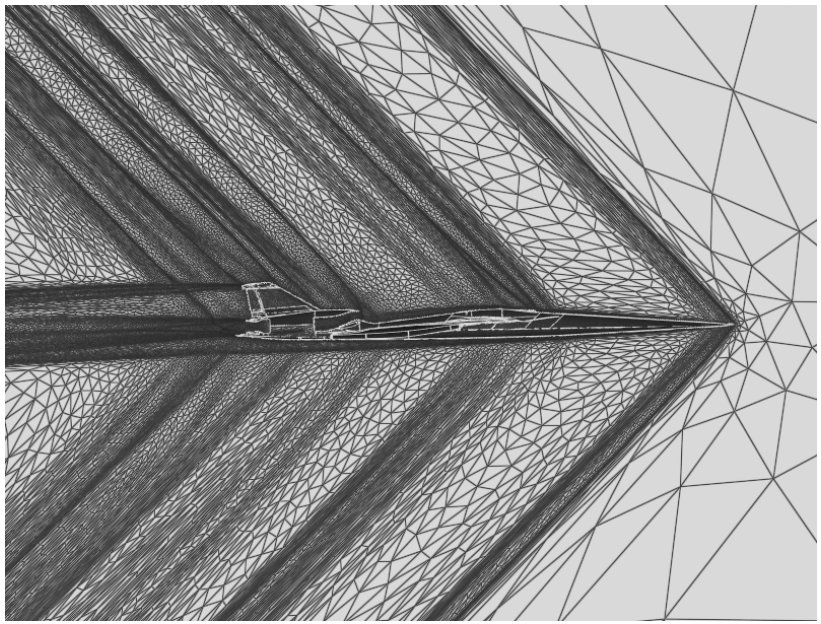
Introduction: adaptation a priori

Adaptation a priori

- Minimisation erreur interpolation (physique/origine du champ inconnue)
- Anisotropie solution $\rightarrow$ anisotropie maillage

Prototype C608 "low-boom" en vol supersonique:

- Maillages adaptés: 1M/20M elements (intermédiaire/final)
- Maillage uniforme de même borne d'erreur: $10^{19}/10^{26}$ elements, facteur $\times 10^{13}/10^{18}$



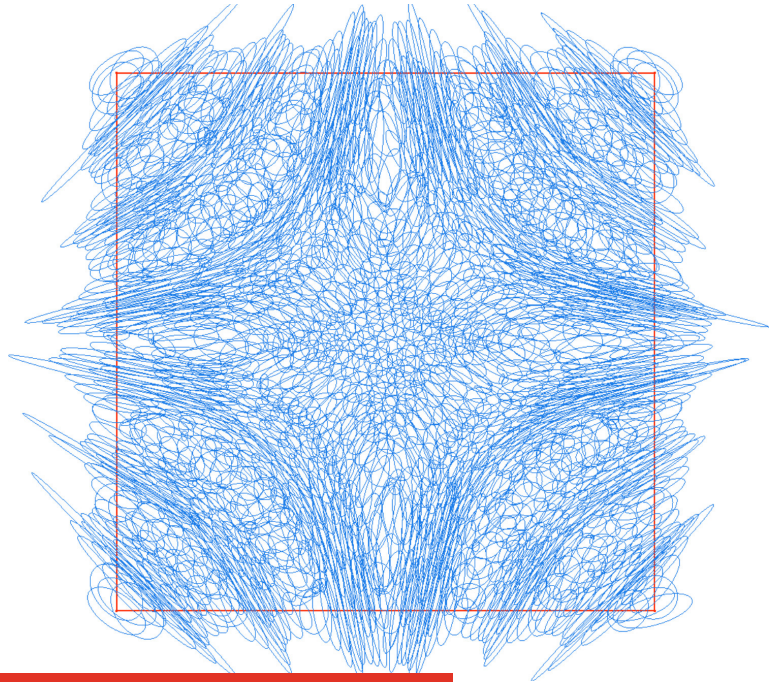
Introduction: adaptation a priori

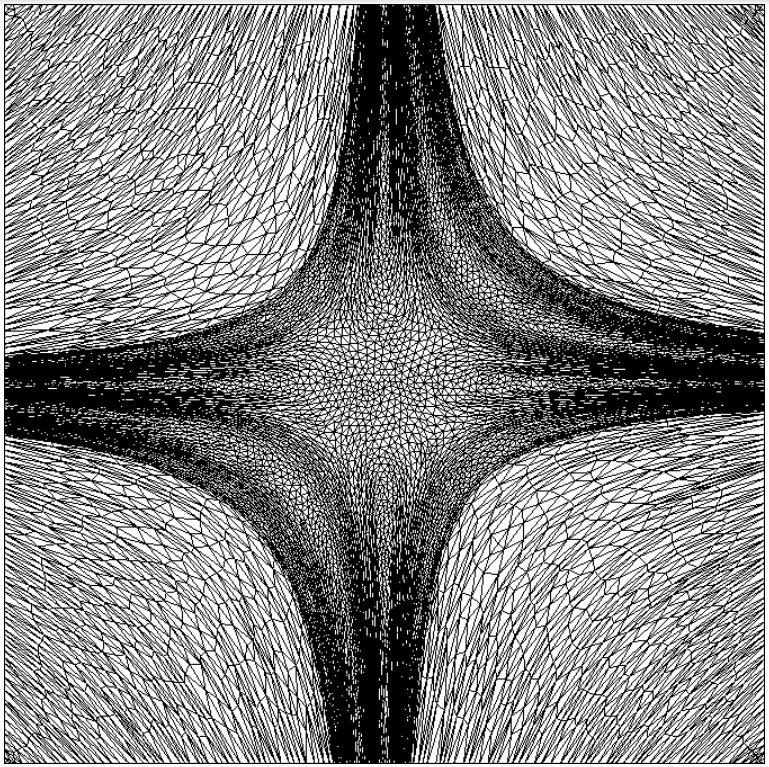
Fondements

- Concept de métrique $\mathcal{M} \sim |H|$, de maillage unité $||l_i||_{\mathcal{M}} = 1$
- Analyse globale et de convergence: maillage continu [a] [b]

[a] A. Loseille and F. Alauzet, 'Continuous Mesh Framework Part I: Well-Posed Continuous Interpolation Error', SIAM J. Numer. Anal., Jan. 2011

[b] A. Loseille and F. Alauzet, 'Continuous Mesh Framework Part II: Validations and Applications', SIAM J. Numer. Anal., Jan. 2011



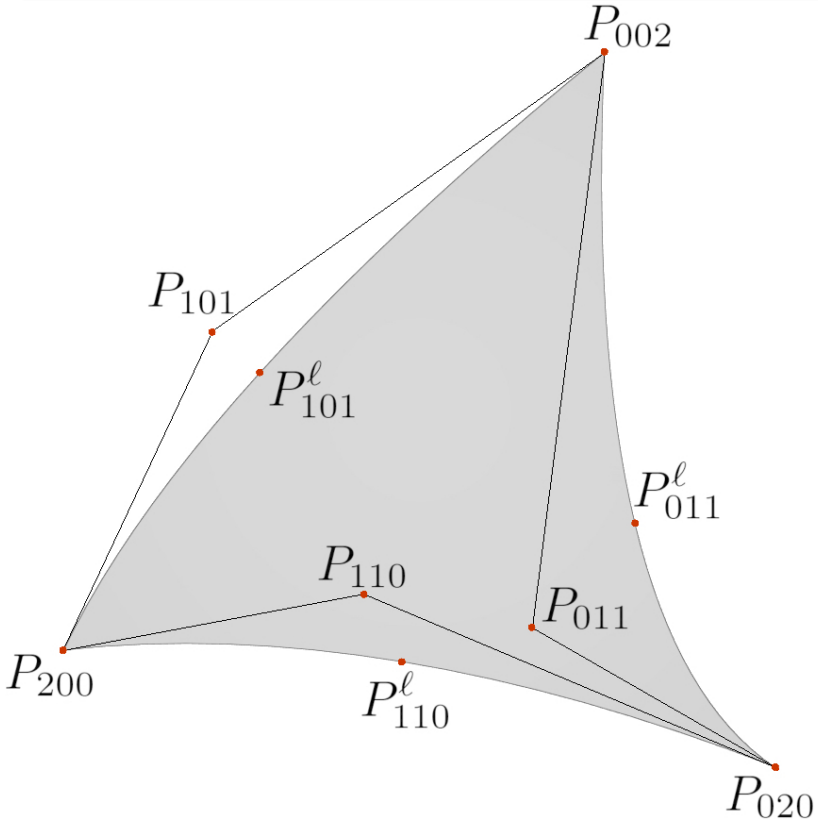


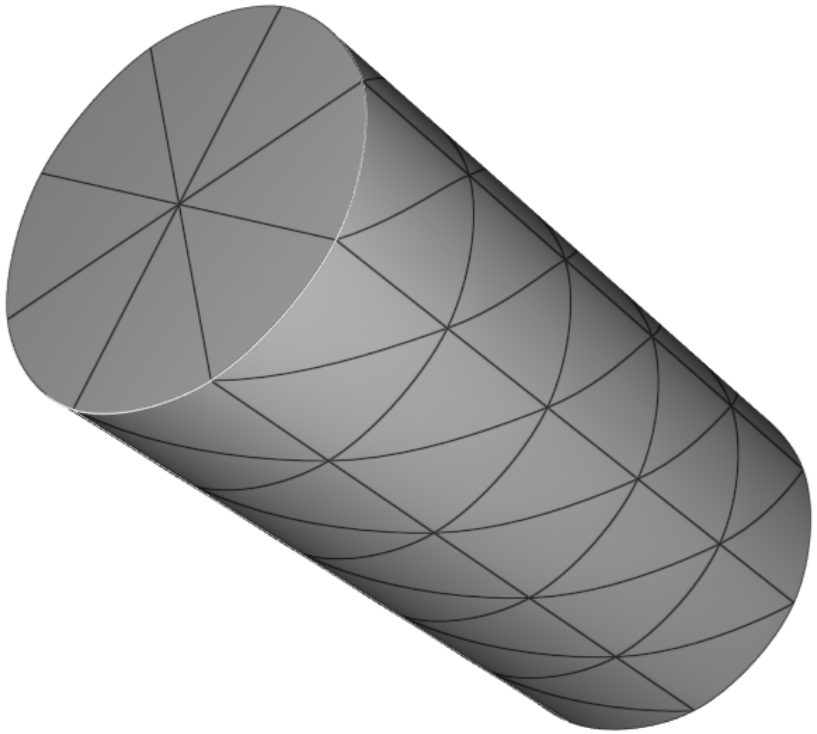
Introduction: EF isoparamétriques

Motivation

- Éléments $F_K(\widehat{K})$, F_K polynomiale
- Approximation de surface [a]

[a] P. Ciarlet and P.-A. Raviart "The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods" 1972





Introduction: EF isoparamétriques

Difficultés théoriques

- Fonctions de base physiques $\phi_\alpha = \widehat{\phi}_\alpha \circ F_K^{-1}$ sont ...?
- Convergence pire des cas sur maillage de degré q: [a] [b]

$$||u - \Pi u||_{L^\infty} \leq Ch^{\lfloor p/q \rfloor + 1}$$

[a] D. Moxey, S. P. Sastry, and R. M. Kirby, 'Interpolation Error Bounds for Curvilinear Finite Elements and Their Implications on Adaptive Mesh Refinement', J Sci Comput, 2019

[b] L. Botti, 'Influence of Reference-to-Physical Frame Mappings on Approximation Properties of Discontinuous Piecewise Polynomial Spaces', J Sci Comput, 2012

Introduction: EF isoparamétriques

Difficultés pratiques

- Jacobien de F_K non constant
  - Validité (positivité du déterminant)
  - Intégration plus coûteuse (solveur)

$\rightarrow$ Coefficients de contrôle [a] et raffinement itératif: condition suffisante

- Génération/correction de maillages courbes coûteuse et sensible (convergence potentiellement $\times 1/p$...)

[a] P. L. George and H. Borouchaki, 'Construction of Tetrahedral Meshes of Degree Two', Int. J. Numer. Meth. Engng, 2012

Introduction

Actuellement:

- Estimateurs d'erreur actuels pénalisent la courbure: l'équivalent d'estimateurs isotropes vis-à-vis de l'anisotropie
- Réduction vitesse convergence démontrée et observée dans la pratique sur maillages aléatoirement courbes
- La préoccupation principale/historique est de courber la surface

Présenté ici:

1. Adaptation courbe de l'intérieur: super-convergence
2. Correction efficace du Jacobien basée sur la méthode du simplexe
3. Résultats numériques sur géométries complexes

Plan

1. Adaptation courbe de l'intérieur: super-convergence
   - Minimisation numérique de l'erreur d'interpolation sur maillages de tétraèdres P^2
   - Résultats numériques de convergence
2. Correction efficace du Jacobien basée sur la méthode du simplexe
   - Minimisation de la longueur d'arête Riemannienne
   - L'algorithme du simplexe pour la correction du Jacobien
   - Performance and comparison with differentiable optimization algorithms
3. Exemples numériques
   - NASA CRM - HLPW4

Minimisation numérique de l'erreur d'interpolation

- Tétraèdres P^2, points de contrôle aux sommets $P_{2000}, P_{0200}, \ldots$ et aux arêtes $P_{1100}, \ldots$
- $\mathcal{B}(P_\alpha)$ la boule ou coquille de P_α
- Résoudre à l'aide de "DITET"[1] ou Newton:

$$\min_{P_\alpha \in \mathbb{R}^3} \sum_{K \in \mathcal{B}(P_\alpha)} \int_K ||e_K f||^p dk$$

et itérer jusqu'à convergence.

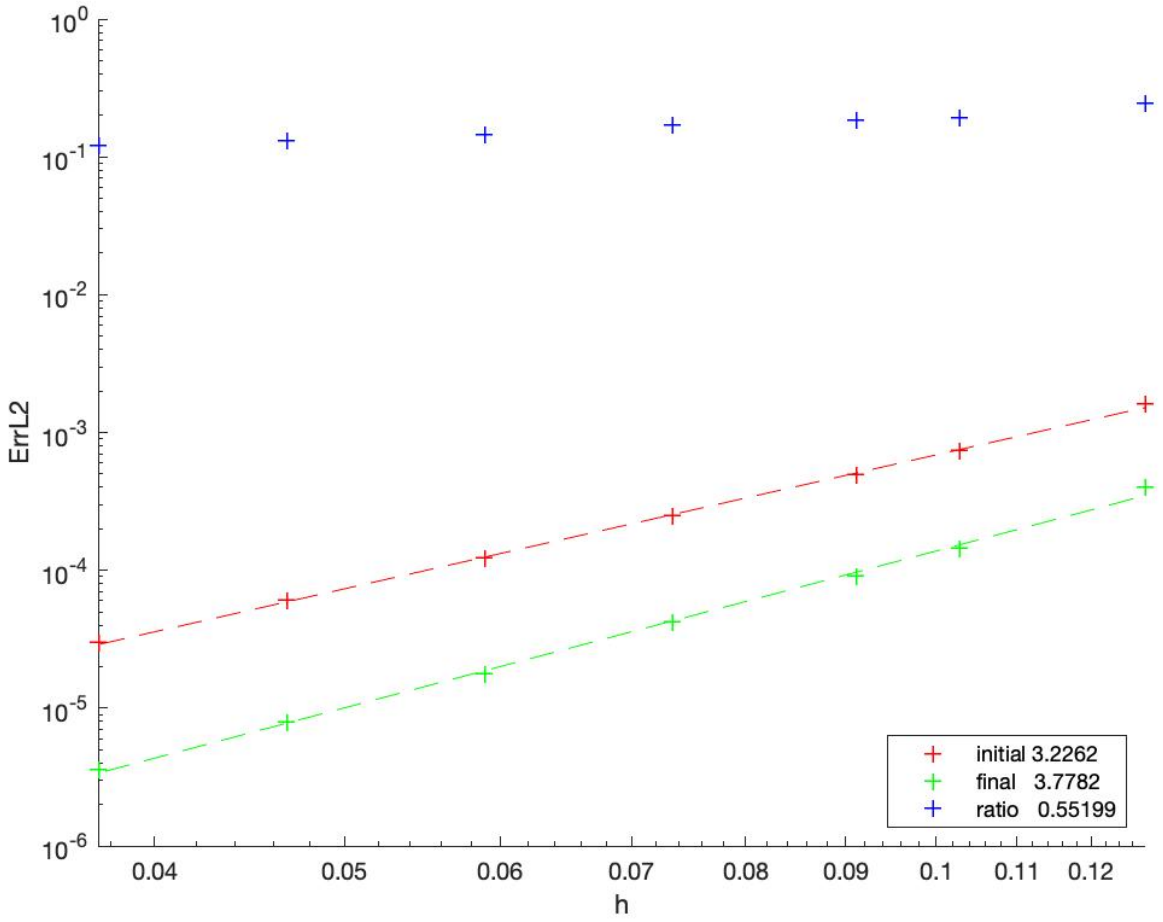
[1] D. R. Jones, C. D. Perttunen, and B. E. Stuckman, 'Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant', J Optim Theory Appl, 1983

Convergence du courbe optimal: fonction cubique

- Fonction cubique + quadratique $f(x) = T(x,x,x) + Q(x,x)$

→ Ratio opt / droit $= \mathcal{O}(h^{0.55})$

→ Erreur divisée par 10



Courbe optimal: conclusion

Conclusions

- On pourrait gagner un demi-ordre de convergence à courber
- En particulier, la croyance suivant laquelle le courbe est de moins en moins pertinent à mesure qu'on raffine semble fausse

Limitations

- L'absence de cadre théorique nous pousse à l'optimisation numérique...

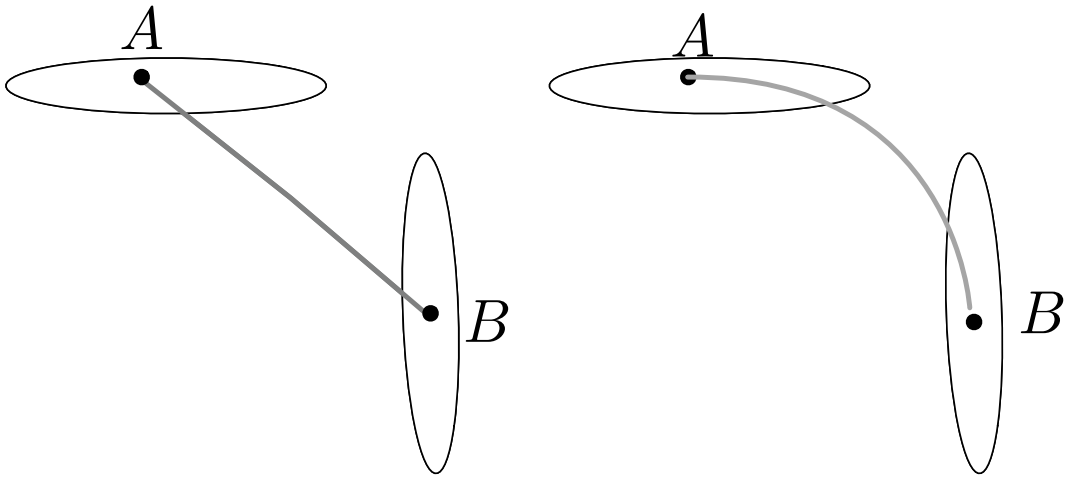
→ trop coûteux pour des applications réelles

Plan

1. Adaptation courbe de l'intérieur: super-convergence
   - Minimisation numérique de l'erreur d'interpolation sur maillages de tétraèdres P^2
   - Résultats numériques de convergence
2. Correction efficace du Jacobien basée sur la méthode du simplexe
   - Minimisation de la longueur d'arête Riemannienne
   - L'algorithme du simplexe pour la correction du Jacobien
   - Performance and comparison with differentiable optimization algorithms
3. Exemples numériques
   - NASA CRM - HLPW4

Minimisation de la longueur Riemannienne d'arête

- Champ de métriques induit naturellement une courbure à travers du plus court chemin:



- Estimateurs d'erreur (éléments P^1):

$$||u - \Pi_K u||_{L^1(K)} = \frac{|K|}{40} \sum ||l_i||^2_{|D^2 u|}$$

- Minimisation de la longueur d'arête sous $\mathcal{M}$[2]

$$\ell_{\mathcal{M}} = \int_0^1 \sqrt{P'(t)^T \mathcal{M}(t) P'(t)} dt$$

[2] L. Rochery, A. Loseille, "P^2 Cavity Operator with Metric-Based Volume and Surface Curvature", in proc. 29-th IMR, 2021

Validité des maillages d'ordre élevé: correction du Jacobien

Validity

Evaluer puis prescrire borne inférieure sur le déterminant du Jacobien des tétra. P^2

Approche

- Tétra. P^2 de pts. de contrôle $P_{2000}, ..., P_{1100}, ...$; J_K est un pnôme de degré 3, dans la base de Bernstein:

$$J_K(\xi) = \sum_{|\alpha|_{\ell^1}=3} N_\alpha B_\alpha(\xi)$$

- Les Bernsteins vérifient $0 \leq B_\alpha \leq 1$ and $\sum B_\alpha = 1$ donc J_K borné par min et max des coeffs. de ctrôle:

$$\min_{|\alpha|_{\ell^1}=3} N_\alpha \leq J_K \leq \max_{|\alpha|_{\ell^1}=3} N_\alpha$$

$\rightarrow$ **Problème "réduit" à des bornes sur les coeffs de contrôle N_α.**

Validité des maillages d'ordre élevé: correction du Jacobien

Validity

→ **Problème "réduit" à des bornes sur les coefficients de contrôle** N_α: $J_K(\xi) \geq \min_\alpha N_\alpha$.

Difficultés

- coût: **20** coeffs par tétra.
- dimension de l'espace de recherche: $3 \times 10 =$ **30** variables par tétra.
- critère: $\min_\alpha N_\alpha$ cubique par morceaux par rapport à ses 30 variables
- sensibilité: 10/16 coeffs par tétra. dependent de chaque pt de contrôle!

Validité des maillages d'ordre élevé: correction du Jacobien

Validity

→ **Problème "réduit" à des bornes sur les coefficients de contrôle** N_α: $J_K(\xi) \geq \min_\alpha N_\alpha$.

Solution

- Coeffs de contrôle sont des combinaisons linéaires de déterminants:

$$N_\beta = \sum_{\alpha,\alpha',\alpha''} M^\beta_{\alpha,\alpha',\alpha''} \det(P_\alpha P_{\alpha'} P_{\alpha''}) = \underbrace{C}_{\textit{constante}} + \underbrace{L(P_{\alpha_0})}_{\textit{linéaire}}$$

- Figer tous pts de contrôle sauf un P_{α_0} choisi
- Problème max-min désormais un programme linéaire:

$$\max_{P_{\alpha_0}\in\mathbb{R}^3} \min_{|\beta|=3} N_\beta(P_{\alpha_0}) \iff \begin{cases} \max\limits_{P_{\alpha_0}\in\mathbb{R}^3} y \\ \forall\ \beta,\ y \leq N_\beta(P_{\alpha_0}) \end{cases}$$

Validité des maillages d'ordre élevé: correction du Jacobien

Validity

→ **Problème "réduit" à des bornes sur les coefficients de contrôle** N_α: $J_K(\xi) \geq \min_\alpha N_\alpha$.

Solution

Résoudre le programme linéaire du $\max_{\mathbb{R}^3} \min_i N_i$ autour des coquilles d'arête à l'aide de la méthode du simplexe en une passe.

Avantages

- L'irrégularité de $\min N_i$ n'est plus problématique
- Solution globale et très peu coûteuse
- Solution exacte
- Approche très générique: l'analyse s'applique à tous les degrés de simplexes, mais aussi à d'autres éléments comme les pyramides, hexaèdres, prismes...

Correction du Jacobien à l'aide de la méthode du simplexe: vitesse

- Opérations par seconde pour: résoudre simplexe sur une coquille, évaluer coeffs de contrôle, les dériver
- Ordinateur portable, code séquentiel, CPU ∼4.2GHz

	Ops/sec	Ratio simplexe
Simplexe sur coquille	110k	1
Eval coeffs sur shell	880k	8
Diff coeffs sur shell	570k	5.2

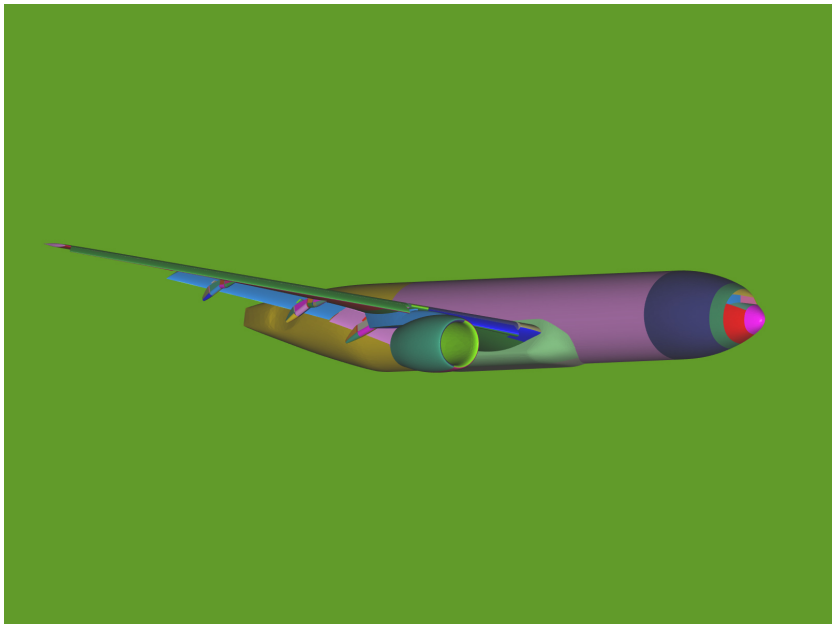
- Pour battre cette nouvelle méthode:
  - donner la solution globale du pb. $\max_{P_{\alpha_0} \in \mathbb{R}^3} \min N_i$ de tous les coefficients de contrôle sur une coquille ($\sim$ 80 coefficients)
  - En 8 ou moins calculs du critère + dérivées

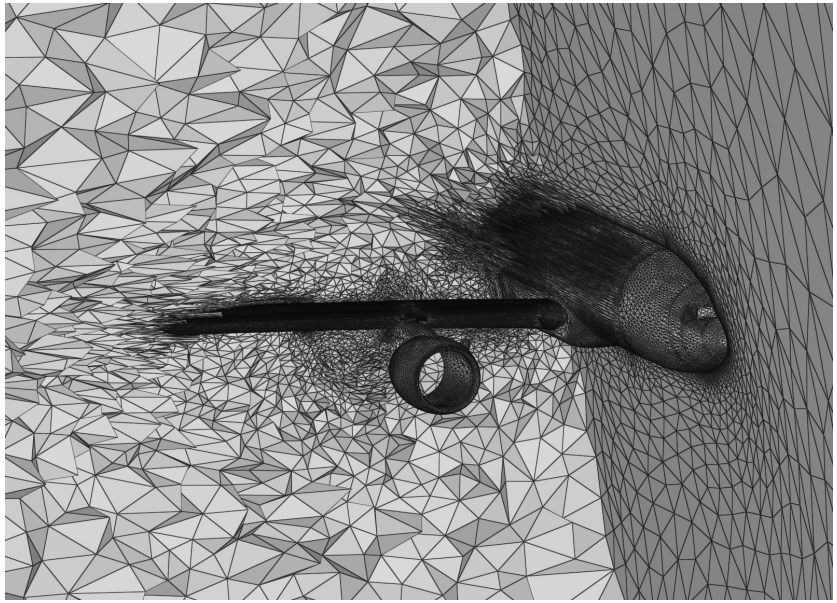
Plan

1. Adaptation courbe de l'intérieur: super-convergence
   - Minimisation numérique de l'erreur d'interpolation sur maillages de tétraèdres P^2
   - Résultats numériques de convergence
2. Correction efficace du Jacobien basée sur la méthode du simplexe
   - Minimisation de la longueur d'arête Riemannienne
   - L'algorithme du simplexe pour la correction du Jacobien
   - Performance and comparison with differentiable optimization algorithms
3. Exemples numériques
   - NASA CRM - HLPW4

High-Lift CRM: geometry and solution

- High-Lift Common Research Model pour le HLPW4
- Maillage P^1 adapté à une solution de Wolf (RANS) à l'aide de feflo.a/AMG

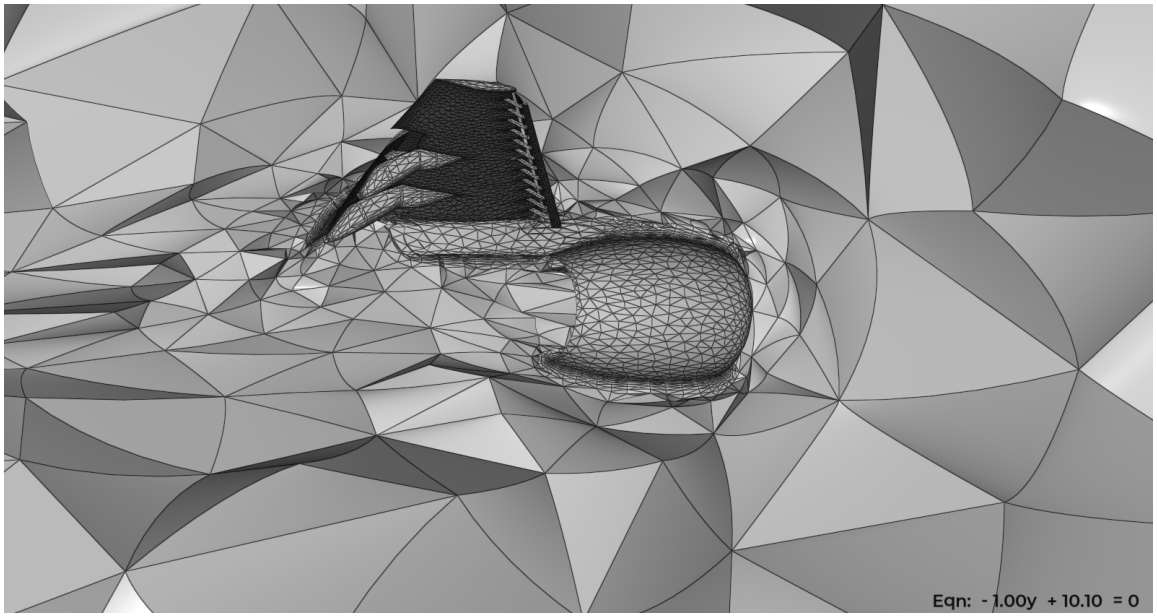




Volume curvature

- 4.3M tet, 750k points initiaux, 5.8M points finaux (HO)
- Optimiser longueur d'arête et corriger
- Distance relative moyenne au projeté $0.74e-4$

Etape	Temps	min J_K	# of < 0 coeffs	ratio
Projection surface	0.3s	-149.96	132000	0.2x
Minimiser longueurs arête	330s	-2510.8	645000	63x
Correction basée sur le simplexe	40s	-1.41	10172	∞
Relaxation au droit	170s	$> \epsilon$	0	-
Total	540s			



Concluding remarks

Adaptation d'ordre élevé

- Gain d'un demi-ordre de convergence

→ bénéfices non limités à maillages grossiers

Correction du Jacobien basée sur la méthode du simplexe (RO)

- Méthode de séparation des variables: rend coeffs de contrôle linéaires
- Optimum global pour le max min N_i sur coquilles
- Très rapide: temps CPU équivalent à 8 évaluations
- S'étend facilement à d'autres degrés ou types d'éléments (hexas, prismes...)

Perspectives

- Améliorer stratégie itérative: principal défaut de la version globale de la méthode
- Tester performances sur tets P^3, hexas Q^2...
- Séparer par rapport aux coordonnées dans une base et optimiser maillage entier en une passe (une coordonnée à la fois):

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = L(\mathbf{x}) + C$$

Merci pour votre attention

P^2 length minimization

- P^2 length of the edge $P(t) = (1-t)^2 P_{20} + 2t(1-t)P_{11} + t^2 P_{02}$ in metric field $\mathcal{M}$ given by

$$\ell_{\mathcal{M}} = \int_0^1 \sqrt{P'(t)^T \mathcal{M}(t) P'(t)} dt \simeq \sum_{1 \leq i \leq N_Q} w_i \sqrt{P'(t_i)^T \mathcal{M}(t_i) P'(t_i)}$$

- Metric interpolated along the edge with high-order log-euclidean metric interpolation scheme[3]

$$\log \mathcal{M}(t) = C(t) + 4t(1-t) \log \mathcal{M}(P_{11}^{\ell})$$

- Metric at d.o.f. P_{11}^{ℓ} interpolated from back mesh (localization + interpolation)
- Continuous interpolation allows for differentiation of $\ell_{\mathcal{M}}$[4]

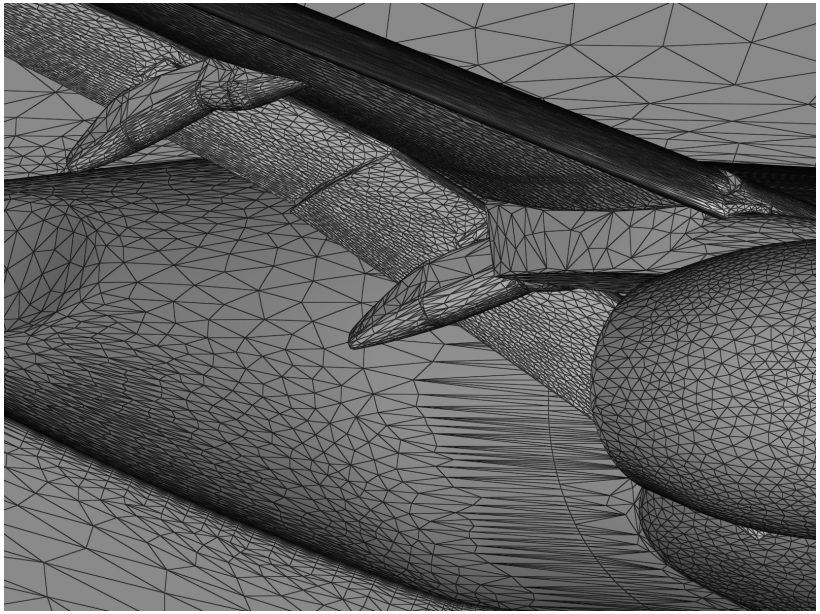
[3] Arsigny V., Fillard P., Pennec X., Ayache N. "Fast and Simple Computations on Tensors with Log-Euclidean Metrics." Tech. rep., INRIA, 2005

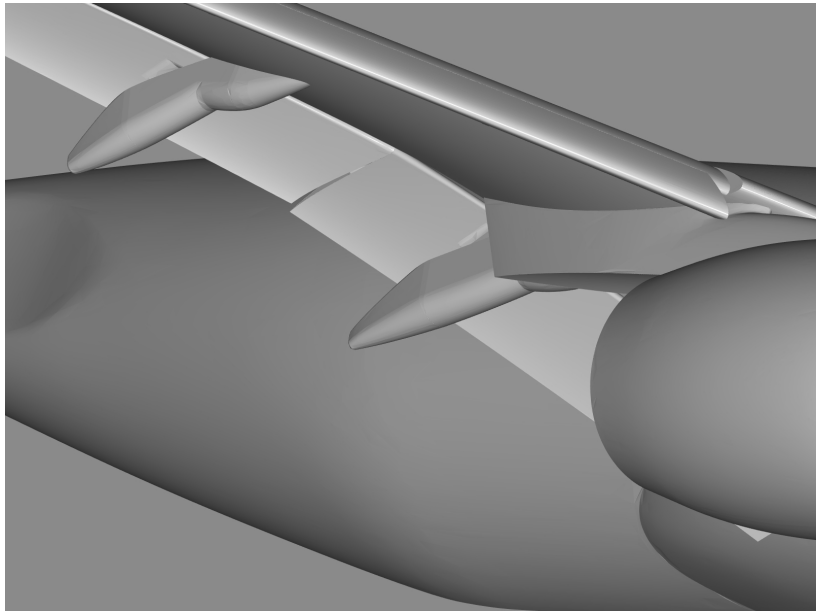
[4] L. Rochery, A. Loseille, "P^2 Cavity Operator with Metric-Based Volume and Surface Curvature", in proc. 29-th IMR, 2021

Surface-only + BL curvature

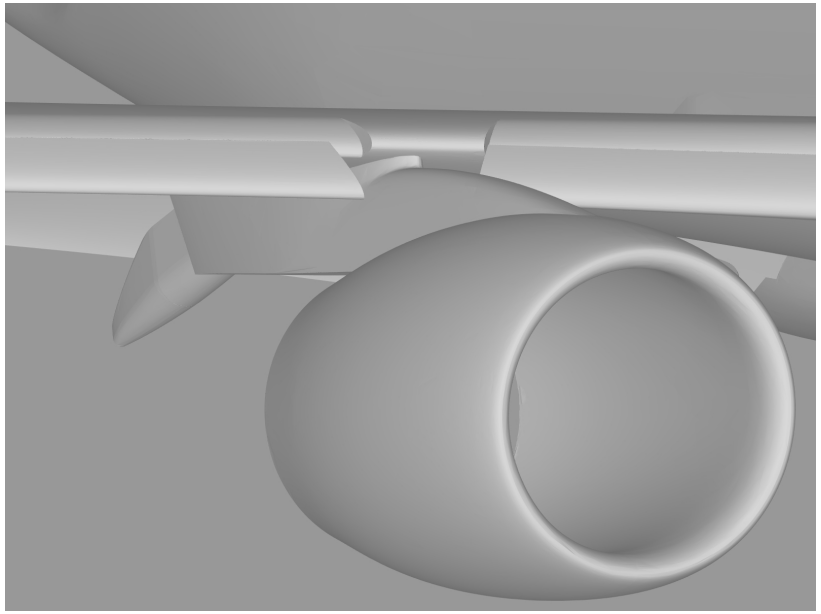
- Project on surface, curve BL explicitly, and correct (no volume curving)
- Final Avg rel. distance to proj $0.66E-04$

Step	Time	min J_K	# of < 0 coeffs	ratio to next
Project surface points	0.3s	-146.96	132000	4.75x
BL curvature module	0.17s	-146.35	27850	4.02x
Simplex-based correction	17.4s	-1.07	6922	∞
Conservative straightening	218s	$> \epsilon$	0	-
Total	230s			





Surface-only curvature

- Project on surface and correct (no volume curving)
- Final Avg rel. distance to proj $0.95e-4$

Step	Time	min J_K	# of < 0 coeffs	ratio to next
Project surface points	0.3s	-146.96	132000	23.5x
Simplex-based correction	12s	-1.35	5616	∞
Conservative straightening	218s	$> \epsilon$	0	-
Total	230s