

Problème d'évolution généralisé

Alexandre THOREL, LMAH - Le Havre

On étudie un problème de diffusion généralisée, en dynamique de population, posé dans un ouvert cylindrique $\Omega =]a, b[\times \omega$, où ω est un ouvert régulier de R^{n-1} . Le terme "diffusion généralisée" signifie ici que la diffusion spatiale s'écrit comme une combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien. Le terme biharmonique modélise la dispersion induite par des interactions à longues portées (au voisinage du voisinage). Ce travail s'inspire de [1].

Soit $T > 0$. On étudie le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) + \Delta^2 u(t, x, y) - k \Delta u(t, x, y) &= f(t, x, y), \quad t \in]0, T], \quad x \in]a, b[, \quad y \in \omega, \\ u(t, x, \zeta) = \Delta u(t, x, \zeta) &= 0, \quad t \in]0, T], \quad (x, \zeta) \in]a, b[\times \partial \omega \\ u(t, a, y) = u(t, b, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, a, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, b, y) &= 0, \quad t \in]0, T], \quad y \in \omega \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y), \quad x \in]a, b[, \quad y \in \omega, \end{cases}$$

où $k \in R$, $f \in L^p((0, T) \times \Omega)$, $p \in]1, +\infty[$ et u est une densité de population.

L'étude de ce problème structuré en temps et en espace est réalisé dans le cadre général des espaces de Banach construits sur les espaces L^p . Pour cela, on étudie les propriétés spectrales de l'opérateur de diffusion généralisée suivant :

$$\begin{cases} D(\mathcal{A}) &= \left\{ \varphi \in W^{4,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) : \Delta \varphi = 0 \text{ sur }]a, b[\times \partial \omega \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ sur } \{a, b\} \times \omega \right\} \\ \mathcal{A} \varphi &= -\Delta^2 \varphi + k \Delta \varphi, \quad \varphi \in D(\mathcal{B}). \end{cases}$$

Le problème EDP précédent se réécrit alors comme un problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} u'(t) - \mathcal{A}u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $u(t)(\cdot) := u(t, \cdot)$ et $f(t)(\cdot) := f(t, \cdot)$ avec $f \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$.

On montre alors l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy abstrait ayant la régularité maximale si et seulement si u_0 est dans un espace d'interpolation réel approprié, voir [4]. On utilise entre autres [2], [3], [5].

Cette étude s'inscrit dans le cadre général de l'analyse fonctionnelle et des EDP. Elle utilise principalement la théorie des semi-groupes, la théorie de l'interpolation réelle, le calcul fonctionnel, la théorie des espaces de Banach UMD.

- [1] D. Cohen, J. Murray. *A generalized diffusion model for growth and dispersal in population*. Journal of Mathematical Biology, **12**, 1981.
- [2] G. Dore, A. Venni. *On the closedness of the sum of two closed operator*. Math. Z., **196**, 1987.
- [3] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau, A. Thorel. *On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain*. J. Math. Anal. Appl., **450**, 2017.
- [4] R. Labbas, S. Maingot, A. Thorel. *Generation of analytic semigroups for some generalized diffusion operators in l^p -spaces*. Mathematische Annalen, 2021.
- [5] A. Thorel. *Operational approach for biharmonic equations in l^p -spaces*. Journal of Evolution Equations, **20**, 2020.

Contact : alexandre.thorel@orange.fr