Peut-on entendre la forme d'une pièce ?

Antoine DELEFORGE, Inria Grand Est, Cerema - Nancy et Strasbourg
Cédric FOY, Cerema - Strasbourg
Yannick PRIVAT, IRMA, univ. Strasbourg et IUF - Strasbourg
Tom SPRUNCK, IRMA, univ. Strasbourg - Strasbourg

On considère le problème inverse suivant : étant donné une mesure en temps discret de la propagation d'une impulsion sonore depuis une source ponctuelle et omnidirectionnelle jusqu'à une antenne de microphones (appelée RIR ou *Room Impulse Response*), peut-on estimer la géométrie de la pièce ?
Nous abordons cette question théoriquement et numériquement, dans le cas de pièces parallélépipédiques.
Pour formaliser ce problème, nous utilisons la méthode dite des *sources images* [1], permettant de remplacer la frontière de la pièce à reconstruire par une constellation de *sources images* correspondant à des copies itérées réfléchies de la source originale de son par rapport aux murs de la pièce.
La question peut alors se formuler comme un problème d'optimisation consistant à identifier les positions d'une combinaison linéaire de masses de Dirac en espace - les sources images - à partir d'observations en temps discrètes de la solution de l'équation des ondes aux microphones (les RIR), qui en sont l'image par un opérateur linéaire Γ. Connaître les positions des sources images jusqu'à l'ordre 1 suffit alors à reconstruire la géométrie de la pièce.
Ce problème s'inscrit ainsi dans le cadre récent de la super-résolution [4, 2], qui vise à reconstituer les positions et amplitudes des pics d'une mesure parcimonieuse à partir d'observations linéaires. On considère ici une relaxation convexe du problème en l'étendant à l'ensemble des mesures de Radon $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$ (BLASSO) :

$$\min_{\psi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)} \frac{1}{2} \|y - \Gamma\psi\|_2^2 + \lambda \|\psi\|_{\mathrm{TV}} \tag{1}$$

où $\lambda > 0$ désigne un paramètre réel de régularisation par la norme de variation totale $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$.
Il est notable que l'opérateur Γ présente dans notre cas des singularités rendant l'analyse mathématique du problème résultant ardue. Nous démontrons que le problème est bien posé.
Afin de le résoudre numériquement, nous adaptons l'algorithme Sliding Frank-Wolfe [3] qui propose une résolution numérique efficace des problèmes de super-résolution. Sur des données synthétiques bruitées, nous montrons que les positions des sources images issues des premières réflexions sonores sur les parois de la pièce peuvent être estimées avec une grande précision dans le cadre de salles parallélépipédiques en utilisant une antenne sphérique compacte.

[1] J. B. Allen, D. A. Berkley. *Image method for efficiently simulating small-room acoustics.* Journal of the Acoustical Society of America, **65**, 943–950, 1976.

[2] E. J. Candès, C. Fernandez-Granda. *Towards a mathematical theory of super-resolution.* Communications on pure and applied Mathematics, **67(6)**, 906–956, 2014.

[3] Q. Denoyelle, V. Duval, G. Peyré, E. Soubies. *The Sliding Frank-Wolfe Algorithm and its Application to Super-Resolution Microscopy.* Inverse Problems, 2019. doi :10.1088/1361-6420/ab2a29.

[4] V. Duval, G. Peyré. *Exact Support Recovery for Sparse Spikes Deconvolution.* Foundations of Computational Mathematics, **15(5)**, 1315–1355, 2015. doi :10.1007/s10208-014-9228-6.

Contact : `tom.sprunck@unistra.fr`