Exposé: Schéma MPFA pour le gradient de pression dans Stokes

Andrew PEITAVY, CEA - Saclay **Erell JAMELOT**, CEA - Saclay
Christophe LE POTIER, CEA - Saclay **Éric CHÉNIER**, UGE - Champs-sur-Marne
Robert EYMARD, UGE - Champs-sur-Marne

Dans le cadre de la sécurité nucléaire, le Laboratoire de Modélisation et de Simulation en mécanique des Fluides (LMSF) développe le code TrioCFD, qui permet la résolution des équations de Navier-Stokes. Le problème de Stokes est une approximation de ces équations lorsque les effets visqueux dominent sur les effets inertiels. Dans le cadre du cas isotherme, incompressible stationnaire et homogène et si l'on considère Ω, un ensemble borné convexe à frontière Lipschitzienne, alors, les inconnues sont la vitesse $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et la pression $p \in L_0^2(\Omega)$ du fluide tel que :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = & \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = & 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où ν est la viscosité cinématique et le terme source est représenté par $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Pour les maillages de simplexes, la discrétisation spatiale du code TrioCFD est basée sur les éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart [2] : l'espace de discrétisation des composantes de la vitesse est l'espace P^1 non conforme (noté P^1_{nc}) et l'espace de discrétisation de la pression est l'espace $P^1 \cap L_0^2(\Omega) + P^0 \cap L_0^2(\Omega)$ (noté $M^1 + M^0$), ce qui permet de réduire les courants parasites et d'améliorer la précision [4]. Cette amélioration est optimale en 2D, mais en 3D [3], il faut rajouter un nombre important de degrés de liberté pour la pression qui rendent la résolution plus coûteuse en nombre d'opérations et en empreinte mémoire.

Le but de ces travaux est d'obtenir un schéma aussi précis que le schéma $P^1_{nc} - (M^0 + M^1)$ avec moins de degrés de liberté pour la pression. Dans cette optique, une nouvelle méthode de discrétisation avec les éléments finis de Crouzeix-Raviart pour la vitesse et un schéma MPFA symétrique (Multipoint Flux Approximations [1, 5]) pour la pression sera présentée. Son principe en 2D est de découper les mailles triangulaires en trois quadrangles en reliant les milieux des arêtes et le barycentre des éléments. Ensuite, en introduisant des inconnues aux tiers des arêtes pour la pression, on peut définir un gradient de pression constant pour chaque quadrangle. Enfin, en imposant la continuité des flux de ces gradients à travers les arêtes, on peut alors substituer les inconnues des arêtes par celles des cellules dans le système global. Cette méthode livre des résultats prometteurs et est un bon compromis entre les schémas $P^1_{nc} - M^0$ et $P^1_{nc} - (M^0 + M^1)$.

[1] L. Agélas, R. Masson. *Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes.* Comptes Rendus Mathematique, **346(17)**, 2008.

[2] M. Crouzeix, P.-A. Raviart. *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.* RAIRO, Série Analyse Numérique, **7(3)**, 1973.

[3] T. Fortin. *Une méthode éléments finis à décomposition L^2 d'ordre élevé motivée par la simulation d'écoulement diphasique bas Mach.* Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 2006.

[4] S. Heib. *Nouvelles discrétisations non structuées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée.* Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 2003.

[5] C. Le Potier. *Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés.* Comptes Rendus Mathematique, **340(12)**, 2005.

Contact : `andrew.peitavy@cea.fr`