# Convergence faible de la méthode des volumes finis appliquée aux systèmes hyperboliques sur des maillages généraux

**Sédrick KAMENI NGWAMOU**, Université de Yaoundé I - Cameroon
**Michael NDJINGA**, Université de Paris-Saclay - CEA Saclay

Dans ce travail, nous considérons un système hyperbolique linéaire du premier ordre de la forme suivante :

$$\partial_t U + \sum_k A_k \partial_k U = 0, \tag{1}$$

défini sur $\mathbb{R}^d$ et étudions l'approximation de (1) par la méthode des volumes finis de premier ordre sur des maillages généraux pour données initiales $U(x,0) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
Les preuves de convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes hyperboliques sur des maillages non structurés, supposent généralement que la solution est régulière (au moins $H^1$ à support compact dans [5], $H^2$ dans [1], $H^s$ avec $s \in ]0,1]$ dans [3]), et sont restreintes au schéma amont classique.
Toutefois pour des données initiales $U(x,0) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, potentiellement discontinues, on se base généralement sur des méthodes de compacité. Tout comme dans [2] qui utilise des méthodes de compacité dans $L^\infty$ et $L^1$ pour des lois de concervation scalaires, [4] utilise des méthodes de compacité $L^2$ dans le contexte des systèmes hyperboliques. En utilisant le theorème de Banach-Alaoglu, [4] a prouvé la convergence faible de la méthode des volumes finis non linéaires pour des données initiales $L^2$, à condition que la suite de maillages satisfasse une propriété de régularité.
L'hypothèse de régularité du maillage dans [4] est requise pour prouver la convergence forte de la suite de gradients discrets des fonctions test lorsque le maillage est rafiné (lemme 4 dans [4]).
Nous proposons une nouvelle approche basée sur le théorème de compacité de Riesz-Fréchet-Kolmogorov pour prouver le convergence forte du grandient discrèt et ainsi étendre le résultat de [4] sur des maillages généraux.
Notre nouveau résultat de convergence pour des données initiales $L^2$ et les maillages généraux s'appuie donc sur deux théorèmes de compacité : le théorème de Banach-Alaoglu pour la convergence faible des solutions approchées, et le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov pour la convergence forte des gradients discrets des fonctions test. Nous pensons que cette approche peut trouver des applications dans le cas des équations elliptiques approchées par un schéma volumes finis à deux points.

[1] B. Després. *Lax theorem and finite volume schemes.* Mathematics of computation, **73(247)**, 1203–1234, 2004.

[2] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin. *The finite volume method.* Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 2000.

[3] V. Jovanovic, C. Rohde. *Finite-volume schemes for Friedrichs systems in multiple space dimensions : a priori and a posteriori estimates.* Numer. Methods Partial Differential Eq., **21(1)**, 104–131, 2005.

[4] M. Ndjinga. *Weak convergence of nonlinear finite volume schemes for linear hyperbolic systems.* Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects, pp. 411–419, 2014.

[5] J.-P. Vila, P. Villedieu. *Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de Friedrichs.* C. R. Acad. Sci. Paris Série I, **325**, 671–676, 1997.

Contact : `sedrick.ngwamou@aims-cameroon.org`