Une version polyatomique de Frank-Wolfe pour une résolution rapide et parcimonieuse du LASSO

Adrian JARRET, LCAV - Lausanne **Julien FAGEOT**, LCAV - Lausanne
Matthieu SIMEONI, EPFL Center for Imaging - Lausanne

Ce travail de recherche peut être présenté sous la forme d'un poster ou d'un exposé oral.

Dans cet exposé, nous présentons un nouvel algorithme capable de résoudre efficacement le problème d'optimisation LASSO dans des contextes de grandes dimensions et de hautes parcimonies.

Outil phare pour la reconstruction parcimonieuse d'images et de signaux, le problème LASSO se présente de la forme suivante :

$$\arg\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{G}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1 \tag{1}$$

dans lequel $\mathbf{y}$ est un vecteur de mesures, potentiellement bruitées, issues de l'acquisition d'un certain signal à travers la matrice $\mathbf{G}$.
Des méthodes efficaces existent pour résoudre (1) (citons notamment APGD/FISTA avec une vitesse de convergence de $\mathcal{O}(1/k^2)$, pour k itérations), mais les applications à des données de grande dimension peuvent s'avérer difficiles à mettre en place. En effet, les solutions intermédiaires ne sont généralement pas parcimonieuses, avec un grand nombre de composants non nuls, et donc nécessitent beaucoup de capacité mémoire. Cet inconvénient peut même s'avérer être prohibitif pour certains usages, notamment en imagerie interférométrique pour la radio astronomie, pourtant extrêmement intéressée par les problématiques de parcimonie.
Notre nouvel algorithme, initialement proposé dans [2], se présente comme une modification de l'algorithme classique de Frank-Wolfe [1]. Dans sa version originale, Frank-Wolfe témoigne d'un comportement glouton, en construisant itérativement la solution à un problème d'optimisation comme une combinaison d'éléments caractéristiques de l'espace de recherche, appelés *atomes*. La principale modification apportée par notre variant consiste en la possibilité de pouvoir ajouter plusieurs atomes à chaque nouvelle itération, contrairement à la version originale limitée à un seul atome par itération, d'où le nom d'algorithme **Frank-Wolfe Polyatomique**.
Cette propriété permet d'explorer beaucoup plus rapidement l'espace de recherche. Ainsi, plus la solution au problème LASSO est parcimonieuse, plus l'algorithme identifie rapidement les composantes actives et converge vite. Au-delà de la rapidité d'exécution, s'appuyer sur les atomes identifiés au cours du temps pour construire une solution conduit l'algorithme à ne manipuler que des solutions intermédiaires parcimonieuses. Cette propriété est cruciale pour remédier aux problèmes de mémoire rencontrés en grande dimension, ce qui fait de notre algorithme un candidat prometteur pour étendre le domaine d'application de LASSO à ces contextes.
Les résultats obtenus lors de la résolution de problèmes simulés, dans différents contextes de simulation, présentent des gains de performance significatifs en comparaison avec APGD (durées de convergence $2 \sim 10$ fois plus courtes en fonction du contexte).

[1] M. Frank, P. Wolfe. *An algorithm for quadratic programming.* Naval Research Logistics Quarterly, **3(1-2)**, 95–110, 1956.

[2] A. Jarret, J. Fageot, M. Simeoni. *A fast and scalable polyatomic frank-wolfe algorithm for the lasso.* IEEE Signal Processing Letters, **29**, 637–641, 2022.

Contact : `adrian.jarret@epfl.ch`