# T-coercitivité pour le problème de Stokes

**Erell JAMELOT**, Service de Thermo-hydraulique et de Mécanique des Fluides - CEA Saclay

Le problème de Stokes caractérise l'état stationnaire d'un écoulement newtonien incompressible. Soit $\Omega \subset R^d$, $d \in \{2,3\}$ un domaine borné et connexe. On note $u$ la vitesse du fluide et $p$ sa pression. Dans le cas de conditions aux limites de flux nul, le problème de Stokes s'écrit ainsi :

$$\text{Trouver } (u,p) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L^2_{zmv}(\Omega) \text{ tel que } -\nu\Delta u + \nabla p = u, \quad \nabla \cdot u = 0. \tag{1}$$

La première équation de (1) correspond à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et la seconde, à l'équation de conservation de la masse. Le paramètre $\nu > 0$ représente la viscosité cinématique du fluide et le champ vectoriel $f$ représente la densité de forces extérieures. Nous proposons d'analyser la discrétisation du problème de Stokes (1) avec des éléments finis non conformes à la lumière de la T-coercitivité (cf. [1] pour les problèmes de type Helmholtz, voir [7], [2] et [5] pour l'équation de diffusion des neutrons). Nous nous intéressons aux éléments finis mixtes de Crouzeix-Raviart non conformes [3] (ordre 1, $d = 2,3$), puis aux éléments finis mixtes de Fortin-Soulié [4] (ordre 2, $d = 2$). Soit $(V_h, \|\cdot\|_{V_h})$ (resp. $(Q_h, \|\cdot\|_{Q_h})$) l'espace des vitesses (resp. des pressions) discrètes. Posons $W_h := V_h \times Q_h$, muni de la norme naturelle : $\|(v_h,q_h)\|_{W_h} = (\|v_h\|^2_{V_h} + \|q_h\|^2_{Q_h})^{1/2}$. La formulation variationnelle discrète de (1) s'écrit ainsi : Trouver $(u_h,p_h) \in W_h$ tel que $\forall (v_h,q_h) \in W_h$,

$$a_h((u_h,p_h),(v_h,q_h)) := \nu \int_\Omega \nabla_h u_h : \nabla_h v_h - \int_\Omega p_h \nabla_h \cdot v_h - \int_\Omega q_h \nabla_h \cdot u_h = \int_\Omega f \cdot v_h. \tag{2}$$

Pour prouver que le problème (2) est bien posé, on montrera que la forme bilinéaire, continue et symétrique $a_h(\cdot,\cdot)$ est T-coercitive : $\exists T_h \in \mathcal{L}(W_h,W_h)$, $\exists \alpha > 0$ tels que :

$$\forall (v_h,q_h) \in W_h, \quad |a_h((v_h,q_h),T_h(v_h,q_h))| \geq \alpha \, \|(v_h,q_h)\|^2_{W_h}.$$

On explicitera la constante de stabilité $\alpha$. Puis nous donnerons des résultats numériques illustrant l'importance de corriger le second membre de (2) à l'aide d'un opérateur de projection de $V_h$ dans un sous-espace discret conforme dans $H(div;\Omega)$ [8]. Ces travaux sont détaillés dans l'article [6] (soumis).


[1] P. Ciarlet Jr. *T-coercivity : Application to the discretization of Helmhotz-like problems.* Computers & Mathematics with Applications, **64(1)**, 2012.

[2] P. Ciarlet Jr., E. Jamelot, F. D. Kpadonou. *Domain decomposition methods for the diffusion equation with low-regularity solution.* Computers & Mathematics with Applications, **74(10)**, 2017.

[3] M. Crouzeix, P.-A. Raviart. *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.* RAIRO, Sér. Anal. Numer., **7(3)**, 1973.

[4] M. Fortin, M. Soulié. *A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, **19(4)**, 1983.

[5] L. Giret. *Non-Conforming Domain Decomposition for the Multigroup Neutron SPN Equation.* Ph.D. thesis, Université Paris-Saclay, 2018.

[6] E. Jamelot. *T-coercivity for solving Stokes problem with nonconforming finite elements*, 2022.

[7] E. Jamelot, P. Ciarlet, Jr. *Fast non-overlapping Schwarz domain decomposition methods for solving the neutron diffusion equation.* Journal of Computational Physics, **241**, 2013.

[8] A. Linke. *On the Role of the Helmholtz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **(268)**, 2014.


Contact : `erell.jamelot@cea.fr`