Transport optimal dynamique, surfaces minimales et variables de Clebsch

Emmanuel MAITRE, Laboratoire Jean Kuntzmann - Grenoble

Dans cet exposé on commence par rappeler quelques motivations en rapport avec l'analyse d'images pour s'intéresser au transport optimal [10, 8, 7, 1]. Dans notre travail, nous avons considéré la forme dynamique du transport optimal introduite par Benamou et Brenier [2, 5] dans lequel on ne cherche pas seulement une application optimale, mais aussi un chemin optimal reliant deux densités. Cette forme permet notamment d'inclure des contraintes de type obstacle au déplacement des densités, ce qui peut être utile par exemple pour traiter des images météo prises par des satellites.
L'inconvénient de cette formulation est qu'elle est posée en temps et espace, et mène donc à des problèmes numériquement coûteux pour des images réelles. Nous montrons dans cet exposé quelques techniques permettent de réduire ce temps de calcul : méthodes primal-duales pour la partie optimisation [6], paramétrisation de l'espace des contraintes par une décomposition de Helmholtz [3], ou de Clebsch [9, 4].
Nous nous intéressons aussi à différents coûts de transport, dont l'un intermédiaire entre Wasserstein 1 et 2, qui permet de faire un lien avec l'équation des surfaces minimales.
Les différents exemples traités seront illustrés par des codes python disponibles en ligne.

[1] J.-D. Benamou. *Optimal transportation, modelling and numerical simulation.* Acta Numerica, **30**, 249–325, 2021. doi :10.1017/S0962492921000040.

[2] J.-D. Benamou, Y. Brenier. *A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem.* Numerische Mathematik, **84(3)**, 375–393, 2000.

[3] M. Henry, E. Maitre, V. Perrier. *Optimal transport using helmholtz-hodge decomposition and first order primal-dual algorithm.* In *2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 4748–4752. IEEE, 2015.

[4] M. Henry, E. Maitre, V. Perrier. *Primal-dual formulation of the dynamic optimal transport using helmholtz-hodge decomposition*, 2020.

[5] R. Hug, E. Maitre, N. Papadakis. *On the convergence of augmented lagrangian method for optimal transport between nonnegative densities.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **485(2)**, 123811, 2020.

[6] N. Papadakis, G. Peyré, E. Oudet. *Optimal transport with proximal splitting.* SIAM Journal on Imaging Sciences, **7(1)**, 212–238, 2014.

[7] G. Peyré, M. Cuturi, et al. *Computational optimal transport : With applications to data science.* Foundations and Trends® in Machine Learning, **11(5-6)**, 355–607, 2019.

[8] F. Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians : Calculus of Variations, PDEs, and Modeling. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, vol. 87. Birkhäuser, 2015.

[9] C. Truesdell. *The kinematics of vorticity.* Courier Dover Publications, 2018.

[10] C. Villani. *Topics in optimal transportation.* 58. American Mathematical Soc., 2003.

Contact : `emmanuel.maitre@grenoble-inp.fr`