Un modèle de Cahn-Hilliard à deux flux pour les écoulements diphasiques incompressibles

Clément CANCÈS, Inria - Lille
Daniel MATTHES, Technische Universität - Munich
Flore NABET, CMAP Ecole Polytechnique - Palaiseau

On s'intéresse dans cet exposé à un modèle de champ de phase pour un mélange de deux phases immiscibles et incompressibles (typiquement de l'eau et de l'huile). Le volume de chaque phase est conservé, et les vitesses sont données par des lois de Darcy, c'est à dire proportionnelles au gradient de pression. Plus précisément, étant donné un ouvert Ω convexe et borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \leq 3$), on se donne le système suivant posé pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$:

$$\begin{cases} \partial_t u_i - \nabla \cdot (d_i u_i \nabla(p_i + \Psi_i)) = 0, \\ u_1 + u_2 = 1, \\ p_1 - p_2 = -\alpha \Delta u_1 + \kappa\, u_1 u_2, \end{cases} \tag{1}$$

où u_i désigne la fraction volumique de la phase i, p_i sa pression, Ψ_i un potentiel extérieur (typiquement gravitaire), et où d_i est un coefficient de mobilité possiblement différent pour chaque phase. Lorsque $\alpha \ll 1$ et $\kappa \gg 1$, la dernière équation peut s'interpréter comme une approximation de la loi de Young-Laplace reliant la pression capillaire $p_1 - p_2$ à la courbure de l'interface entre les deux fluides.

Nous verrons que le modèle (1) peut s'interpréter comme le flot de gradient Wasserstein d'une énergie singulière incorporant la contrainte d'incompressibilité $u_1 + u_2 = 1$. Malgré de nombreuses similitudes, (1) diffère du modèle de Cahn-Hilliard avec mobilité dégénérée classique étudié par exemple dans [3]. Comme évoqué dans [4], le modèle (1) dissipe plus vite l'énergie que le modèle classique pour lequel la somme des flux des deux phases s'annulent.

En nous appuyant sur la structure de flot de gradient du système, nous démontrons l'existence d'une solution faible globale [1]. Enfin, nous discuterons de l'approximation numérique du système par un schéma volumes finis préservant les principales propriétés du modèle continu [2].

[1] C. Cancès, D. Matthes, F. Nabet. *A two-phase two-fluxes degenerate Cahn-Hilliard model as constrained Wasserstein gradient flow.* Arch. Ration. Mech. Anal., **233(2)**, 837–866, 2019.

[2] C. Cancès, F. Nabet. *Finite Volume approximation of a two-phase two fluxes degenerate Cahn-Hilliard model.* ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **55(3)**, 969–1003, 2021.

[3] C. M. Elliott, H. Garcke. *On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility.* SIAM J. Math. Anal., **27(2)**, 404–423, 1996.

[4] F. Otto, W. E. *Thermodynamically driven incompressible fluid mixtures.* J. Chem. Phys., **107(23)**, 10177–10184, 1997.

Contact : `clement.cances@inria.fr`