Comportement asymptotique d'une équation intégro-différentielle avec terme d'advection

Jules GUILBERTEAU, Laboratoire Jacques-Louis Lions - Paris

Les équations aux dérivées partielles structurées en phénotypes sont aujourd'hui largement utilisées pour la modélisation de la dynamique évolutive de populations de cellules. Ces modèles permettent d'étudier, outre la taille de la population, un trait phénotypique (concentration d'une molécule, taille...). Ce trait est représenté par une variable continue x, et on désigne par $n(t,x)$ le nombre de cellules portant le trait x au temps t.

Au cours de cette présentation, nous nous intéresserons au comportement asymptotique (lorsque t tend vers $+\infty$) du modèle suivant

$$\begin{cases} \partial_t n(t,x) + \nabla_x \cdot (a(x)n(t,x)) = (r(x) - \rho(t))\, n(t,x) \quad \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \rho(t) = \int_{\mathbb{R}} n(t,x)dx \quad \forall t \geq 0 \\ n(0,x) = n^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

où le terme d'advection '$\nabla_x \cdot (a(x)n(t,x))$' modélise un phénomène de différenciation cellulaire (c'est-à-dire une évolution du trait biologique des cellules), et le terme de croissance non-local '$(r(x) - \rho(t))\, n(t,x)$' la croissance et la sélection entre les différents traits.

Ce modèle a déjà été étudié en l'absence de différenciation ($a \equiv 0$), et il est prouvé dans ce cas qu'un nombre fini de traits est sélectionné, autrement dit que la fonction n se concentre auour d'un nombre fini de points lorsque t tend vers $+\infty$.

Cette présentation vise à établir le comportement en temps long de cette EDP dans un cadre plus général. Nous y exposerons une méthode permettant de ramener l'étude du comportement asymptotique de cette équation à une étude du comportement asymptotique d'intégrales à paramètre. Cette méthode nous permettra de distinguer deux régimes de convergence, dépendants des fonctions a, r et n^0 :

- La concentration autour d'un nombre fini de points (seul un nombre fini de traits est sélectionné).
- La convergence vers une fonction continue (un ensemble continu de traits est préservé, suivant une certaine densité).

Contact : `jules.guilberteau@sorbonne-universite.fr`