Observation optimale des ondes acoustiques

Yannick PRIVAT, IRMA, univ. Strasbourg & IUF - Strasbourg

On s'intéresse à des propriétés optimales de certains problèmes inverses impliquant l'équation des ondes

$$\partial_{tt}p(t,x) - \Delta p(t,x) = 0 \quad (t,x) \in [0,T] \times \Omega,$$

où p désigne une pression acoustique se propageant dans une cavité (bornée) Ω et $T > 0$ correspond à la durée de l'expérience. Un tel modèle s'utilise par exemple en tomographie thermo/photo-acoustique et ultrasonore. Un problème inverse classique est le suivant :

> *étant donné une mesure (effectuée par des capteurs) sur une certaine durée T de la pression p dans un sous-domaine ω de Ω ou sur une partie de $\partial\Omega$, peut-on reconstruire la pression et la vitesse de l'onde initiales (au temps $t = 0$) dans Ω ?*

Les conditions garantissant le caractère bien-posé de ce problème sont bien connues et impliquent une inégalité fonctionnelle appelée *inégalité d'observabilité*. Cet exposé est dédié au problème suivant :

> *existe-t-il une façon optimale de positionner l'ensemble des capteurs permettant de reconstruire "au mieux" les données initiales ?*

Il s'agit d'un problème *d'optimisation de forme* dans lequel l'inconnue est le domaine occupé par les capteurs. Ce problème servira de fil conducteur afin d'introduire certains concepts et techniques en lien avec le contrôle des EDP ou encore le calcul des variations.
Je m'appuierai sur la série de travaux [1, 2, 3, 4, 5, 7] initiés en 2014 et présenterai quelques applications concrètes et résultats plus récents, en lien avec la question : *peut-on entendre la forme d'une pièce ?*
Ces travaux sont en collaboration avec Antoine Deleforge (Inria), Cédric Foy (Cerema), Emmanuel Humbert (univ. Tours), Tom Sprunck (Inria et univ. Strasbourg), Emmanuel Trélat (Sorbonne univ.), Enrique Zuazua (Fau. Erlangen)

[1] E. Humbert, Y. Privat, E. Trélat. *Observability properties of the homogeneous wave equation on a closed manifold.* Comm. Partial Differential Equations, **44(9)**, 749–772, 2019. doi :10.1080/03605302.2019.1581799.

[2] E. Humbert, Y. Privat, E. Trélat. *Geometric and probabilistic results for the observability of the wave equation.* J. Éc. polytech. Math., **9**, 431–461, 2022. doi :10.5802/jep.186.

[3] Y. Privat, E. Trélat, E. Zuazua. *Complexity and regularity of maximal energy domains for the wave equation with fixed initial data.* Discrete Contin. Dyn. Syst., **35(12)**, 6133–6153, 2015. doi : 10.3934/dcds.2015.35.6133.

[4] Y. Privat, E. Trélat, E. Zuazua. *Optimal shape and location of sensors for parabolic equations with random initial data.* Arch. Ration. Mech. Anal., **216(3)**, 921–981, 2015. doi : 10.1007/s00205-014-0823-0.

[5] Y. Privat, E. Trélat, E. Zuazua. *Optimal observability of the multi-dimensional wave and Schrödinger equations in quantum ergodic domains.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **18(5)**, 1043–1111, 2016. doi :10.4171/JEMS/608.

[6] Y. Privat, E. Trélat, E. Zuazua. *Actuator design for parabolic distributed parameter systems with the moment method.* SIAM J. Control Optim., **55(2)**, 1128–1152, 2017. doi :10.1137/16M1058418.

[7] Y. Privat, E. Trélat, E. Zuazua. *Spectral shape optimization for the Neumann traces of the Dirichlet-Laplacian eigenfunctions.* Calc. Var. Partial Differential Equations, **58(2)**, Paper No. 64, 45, 2019. doi :10.1007/s00526-019-1522-3.

Contact : `yannick.privat@unistra.fr`