DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

SCHÉMA MPFA SYMÉTRIQUE APPLIQUÉ AU CODE TRIOCFD

45eme Congrès National d'Analyse Numérique

andrew.peitavy@cea.fr

Doctorant: A. Peitavy Encadrant CEA: E. Jamelot Directeur de thèse CEA: C. Le Potier
Directeur de thèse UGE: E. Chénier Collaboration académique: R. Eymard

CEA SACLAY DES/ISAS/DM2S/LMSF/ ET UNIVERSITÉ GUSTAVE EIFFEL (UGE)

Sommaire

Contexte

Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Outline

Contexte

Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Navier-Stokes isotherme et incompressible

$$\begin{cases} \rho(\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}) - \mu\Delta\,\boldsymbol{u} + \nabla\,p = & \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = & 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Objectif :

Améliorer la précision du code de résolution thermohydraulique de la DES à un nombre de degré de liberté fixé.

Système semi-discrétisé :

$$\begin{aligned} M\frac{dU}{dt} + AU + L(U)U + B^t P = & \quad F, \\ -BU = & \quad 0, \\ U(t=0) = & \quad U^0 \end{aligned}$$

- **Cavité entraînée :**

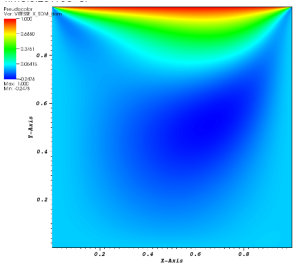


Figure 1 – Solution cavité entraînée avec TrioCFD

Schéma semi-implicite

Discrétisation en temps (Schéma Euler semi-implicite) :

1. **Initialisation :** U^0 donnée, P^0 approché.
2. **Étape de prédiction :** Calculer U^* la solution de

$$\delta t^{-1} M U^* + A U^* + L(U^m) U^m + B^t P^m = F^m + \delta t^{-1} M U^m$$

   Nb : On peut avoir $BU^* \neq 0$

3. **Calcul de la pression :** Calculer P' la solution de

$$B M^{-1} B^t P' = \delta t^{-1} B U^*, \quad P^{m+1} = P' + P^m$$

4. **Etape de correction :** Calculer U^{m+1} la solution de

$$M U^{m+1} = M U^* - \delta t B^t P'$$

Dans TrioCFD, ces étapes sont rapides car M est diagonale pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart.

En 3D, pour un schéma aussi robuste qu'en 2D, il faut rajouter des ddls en pression, ce qui augmente la taille du système de solveur de pression.

Les éléments finis de Crouzeix-Raviart non conforme

Soit un maillage triangulaire $\mathcal{T}_h$ composé de faces $F \in \mathcal{F}_h$. On définit l'espace des vitesses :

$$\mathbf{X}_{h,0} := \{ \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega), \ / \ (\boldsymbol{v}_h)_{|T} \in \boldsymbol{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \ \text{ et } \int_F [\boldsymbol{v}_h] = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \}$$

Plusieurs choix pour la pression :

Crouzeix-Raviart non-conforme

- $M_h := \{ q_h \in L^2_0(\Omega) / q_h \in P^0(T), \ \forall T \in \mathcal{T}_h \}$
- Nb : d composantes pour la vitesse.
- Modes parasites

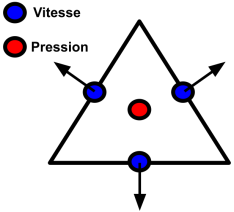


Figure 2 – DDLs Crouzeix-Raviart non-conforme, $d = 2$

TrioCFD :

- $M_h := \{ q_h \in Q_{0,h} + Q_{1,h} \}$
  $Q_{0,h} := L^2_0(\Omega) \cap P^0(\mathcal{T}_h), \ Q_{1,h} := L^2_0(\Omega) \cap P^1_{LG}(\mathcal{T}_h)$
- Optimal pour $d = 3$ si $M_h := \{ q_h \in Q_{0,h} + Q_{1,h} + Q_{a,h} \}$

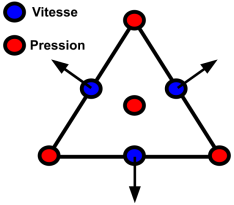


Figure 3 – DDLs TrioCFD, $d = 2$

Problème de Stokes stationnaire

Trouver $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p & = & \boldsymbol{f} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} & = & 0 \end{array} \right.$$

- $\boldsymbol{u}$ est la vitesse, p la pression du fluide. Les données ν (la viscosité cinématique) et $\boldsymbol{f}$ (le terme source) sont données.

Problème variationnel discret pour le problème de Stokes

Trouver $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_{h,0} \times M_h$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + b_h(\boldsymbol{v}_h, p_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} & \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{X}_{h,0} \\ b_h(\boldsymbol{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_h : \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \to \mathbb{R} \\ a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \nu(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_h := \nu \displaystyle\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \boldsymbol{u}_h : \nabla \boldsymbol{v}_h \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_h : \mathbf{X}_h \times M_h \to \mathbb{R} \\ b_h(\boldsymbol{v}_h, q_h) = (\mathrm{div_h} \boldsymbol{v}_h, q_h) = -\displaystyle\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_h) q_h \end{array} \right.$$

Limites des éléments finis de Crouzeix-Raviart non conformes pour Stokes

Soit ϕ une fonction de $H^1(\Omega)$. On considère le problème de Stokes suivant :
Trouver $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$ tel que

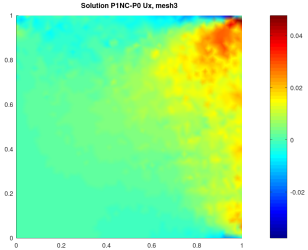
$$\begin{cases} \nu(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)_h - (\mathrm{div_h}(\boldsymbol{v}_h), p_h) = (\nabla\phi, \boldsymbol{v}_h)_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} & \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{X}_{h,0} \\ -(\mathrm{div_h}(\boldsymbol{u}_h), q_h) = 0 & \forall q_h \in M_h \end{cases}$$

La solution est alors $(\boldsymbol{u}, p) = (\boldsymbol{0}, \phi)$. Or pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart, on a

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla\phi \cdot \boldsymbol{v}_h = -\sum_{T\in\mathrm{T}_h} \left(\int_T \phi \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_h + \int_{\partial T} \phi\, \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n} \right)$$

$$= -\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \phi \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_h + \sum_{F\in\mathcal{F}_h} \int_F \phi\, [\boldsymbol{v}_h] \cdot \boldsymbol{n}$$

$$u = 0,\ p = x^5 + x^4y^3 + x^2y + y^4 - \frac{7}{12}$$



Le terme $\sum_F \int_F \phi\, [\boldsymbol{v}_h] \cdot \boldsymbol{n}$ est nul si ϕ est constante ("Patch test"). Autrement, ce terme devient une "source numérique" pour la QDM.

$\mapsto$ Erreur en vitesse qui dépend de la viscosité.
Néanmoins la convergence est garantie.

Outline

Contexte

Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

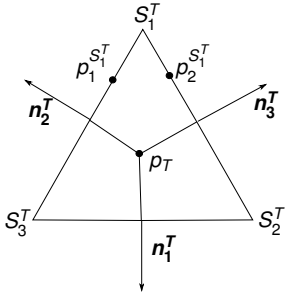
Résultats Numériques

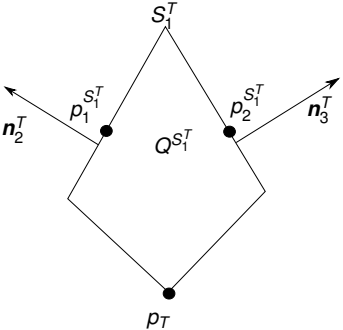
Perspectives et Conclusion

Schéma P1NC-MPFA (Multi-Point Flux Approximation) pour Stokes

Stratégie du schéma [Le Potier'05]

- Découper nos triangles en trois quadrangles
- Ajouter deux inconnues auxiliaires de pression par arête.
- Exprimer le gradient de la pression à l'aide des inconnues auxiliaires de pression sur les arêtes et celle de la cellule.





$$G_T^S = \frac{1}{|Q^{S_1^T}|}\left((p_1^{S_1^T} - p_T)\cdot \boldsymbol{n_1} + (p_2^{S_1^T} - p_T)\cdot \boldsymbol{n_2}\right)$$

La formule est exacte sur des simplexes pour des fonctions affines.

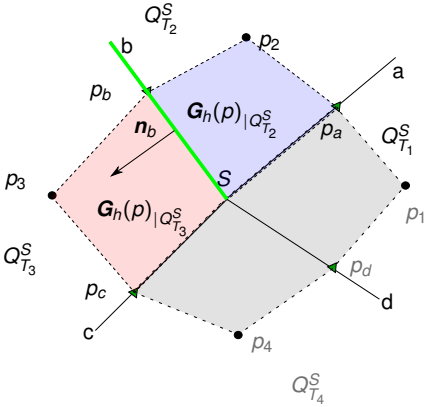
Schéma P1NC-MPFA (Multi-Point Flux Approximation) pour Stokes

Stratégie du schéma

- Éliminer les inconnues auxiliaires en imposant la continuité du flux du gradient sur les arêtes.
- Éléments finis $\mathbf{X}_h$ pour les composantes de la vitesse (seule la matrice de couplage vitesse/pression est modifiée).

- On garde les degrés du bord car on ne peut pas y imposer la continuité des flux.
- On applique ce schéma pour discrétiser le gradient de pression. On résout donc le problème de Stokes avec :

$$\widetilde{b}_h(v_h, q_h) = (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{G}_h(q_h))$$
$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q \in \mathcal{Q}(T)} \int_Q \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{G}_h(q_h)$$



La continuité des flux entre deux triangles T_2 et T_3, partageant l'arête b, et le sommet S s'écrit

$$\boldsymbol{G}_h(p)_{|Q^S_{T_3}} \cdot \boldsymbol{n_b} = \boldsymbol{G}_h(p)_{|Q^S_{T_2}} \cdot \boldsymbol{n_b}$$

Intégration par parties

On n'a pas l'égalité suivante :

$$(p_T, \mathrm{div_h}\, \boldsymbol{v}_h) \neq -(\boldsymbol{G}_h(p_T), \boldsymbol{v}_h)$$

Système considéré

$$\begin{pmatrix} A & G_{int} & G_{bd} \\ D & 0 & 0 \\ G_{bd}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P_{int} \\ P_{bd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ G_{bd}^T U_e \end{pmatrix}$$

$$(A)_{ff'} := \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \int_T \nabla \phi_f : \nabla \phi_{f'}$$

$$(G_{int})_{tf} : \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \int_T \boldsymbol{G}_h(\psi_t^{int}) \cdot \phi_f$$

$$(G_{bd})_{of} : \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \int_T \boldsymbol{G}_h(\psi_o^{bd}) \cdot \phi_f$$

$$(F)_f := \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \int_T \boldsymbol{f} \cdot \phi_f$$

$$(D)_{ft} := \sum_{T \in \mathfrak{T}_h} \int_T \psi_t^{int} \,\mathrm{div}\, \phi_f$$

Avec :

- $J_F = \{1, \ldots, N_F\}, f, f' \in J_F$
- $J_T = \{1, \ldots N_T\}, t \in J_T$
- $J_b = \{1 \ldots 2N_{F_b}\}, o \in J_b$
- La base pour la vitesse est donnée par $(\phi_F^\alpha)_{f \in J_F}^{\alpha \in \{x,y\}}$ et pour la pression $(\psi_T^{int})_{t \in J_T}$ et $(\psi_o^{bd})_{o \in J_b}$
- La vitesse est imposée sur l'épaisseur du bord avec l'équation $G_{bd}^T U = G_{bd}^T U_e$

Condition Inf-Sup

Definition

Définition de la forme bilinéaire globale A :

$$A_{s,h} : \begin{cases} \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h \to \mathbb{R} \\ ((\boldsymbol{u}'_h, p'_h), (\boldsymbol{v}_h, q_h)) \mapsto \nu(\boldsymbol{u}'_h, \boldsymbol{v}_h)_h + (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{G}_h(p'_h)) - (\mathrm{div_h}\, \boldsymbol{u}'_h, q_h) + (\boldsymbol{u}'_h, \boldsymbol{G}_h(q_{h,b})) \end{cases} \tag{1}$$

Avec $\mathcal{X}_h := \mathbf{X}_{0,h} \times Q_h$

Theorem

La T-coercivité est équivalente à la condition Inf-Sup. [Buffa et al'02], [Ciarlet'12]

Travail en cours

Soit $(\boldsymbol{u}'_h, p'_h) \in \mathcal{X}_h$, il faut montrer que

$$\exists \alpha > 0 \,/\, A_{s,h}((\boldsymbol{u}'_h, p'_h), (\boldsymbol{v}_h, q_h)) \geq \alpha(\|\boldsymbol{u}'_h\|_h^2 + \|p'_h\|_0^2)$$

Avec $(\boldsymbol{v}_h, q_h) = T_h(\boldsymbol{u}'_h, p'_h),\ T_h \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h)$.

Travail en cours

Moralement, " $v_h \simeq \boldsymbol{G}_h(p'_h)$ ", et " $q_h \simeq \mathrm{div_h} u'_h$ ".

On choisit :

- $q_h = \mathrm{div_h} \boldsymbol{u}'_h$
- $\boldsymbol{v}_h = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \boldsymbol{v}_F \phi_F$ tq :

  $\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{n}_F = \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_h(p'_h)_{|Q_1} \cdot \boldsymbol{n}_F + \boldsymbol{G}_h(p'_h)_{|Q_2} \cdot \boldsymbol{n}_F)$

  $\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{\tau}_F = \boldsymbol{0}$

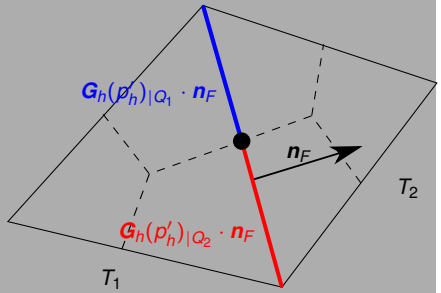
  $\rightarrow$Continuité des flux : vitesse bien définie.

  $\rightarrow (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{G}_h(p'_h)) \geq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q \in Q_T} \|\boldsymbol{G}_h(p'_h)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q)}$

Ce qui reste à montrer :

- Les bords
- Poincaré pour MPFA :

  $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q \in Q_T} \|\boldsymbol{G}_h(p'_h)\|^2_{\boldsymbol{L}^2(Q)} \geq C \|p'_h\|_{L^2(\Omega)^2}$



- $A_{s,h}((\boldsymbol{u}'_h, p'_h), (\boldsymbol{v}_h, q_h)) \geq \alpha(\|\boldsymbol{u}'_h\|^2_h + \|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)})$

Outline

Contexte

Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Résultats pour l'équation de Stokes sur $\Omega = [0;1]^2$ avec divergence P0

Nomenclature des différentes méthodes comparées

- u_h^{CR} : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ / $(\mathbb{P}^0)$
- u_h^{Trio} : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ / $(\mathbb{P}^0 + \mathbb{P}^1)$
- u_h^{Mps} : $\mathbf{X}_{h,0}^{CR}$ / $(MPFA^{SYM} + \text{ divergence } \mathbb{P}^0)$

Nombre de degrés de liberté pour la pression :

h	p_h^{CR}	p_h^{Trio}	p_h^{MPs}
1.00×10^{-1}	242	380	322
5.00×10^{-2}	1054	1622	1214
2.50×10^{-2}	4262	6474	4582
1.25×10^{-2}	16794	25352	17434

- Erreur exacte pour une vitesse affine et une pression affine pour TrioCFD et *MPs* mais pas pour *CR*.
- Erreur exacte pour une vitesse affine et une pression quadratique pour TrioCFD en 2D, mais plus de ddls (en 3D cela s'accentue).
- Plus de robustesse par rapport à la viscosité cinématique.

Résultats pour l'équation de Stokes sur $\Omega = [0;1]^2$

$u_x = 0$, $u_y = 0$
$p = sin(2\pi x)sin(2\pi y)$

h	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{CR}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	3.01×10^{-3}	1.04×10^{-5}	1.44×10^{-4}
5.00×10^{-2}	6.93×10^{-4}	6.52×10^{-7}	1.75×10^{-5}
2.50×10^{-2}	1.63×10^{-4}	4.02×10^{-8}	2.09×10^{-6}
1.25×10^{-2}	4.14×10^{-5}	2.54×10^{-9}	3.91×10^{-7}
τ	$\tau_{\boldsymbol{u}}^{CR} = 2.06$	$\tau_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{Trio}} = 4.00$	$\tau_{\boldsymbol{u}}^{MPs} = 2.84$

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|p - p_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	1.88×10^{-1}	2.48×10^{-2}	1.99×10^{-2}
5.00×10^{-2}	9.06×10^{-2}	5.49×10^{-3}	4.31×10^{-3}
2.50×10^{-2}	4.40×10^{-2}	1.37×10^{-3}	1.09×10^{-3}
1.25×10^{-2}	2.22×10^{-2}	3.50×10^{-4}	2.78×10^{-4}
τ	$\tau_p^{CR} = 1.03$	$\tau_p^{\mathrm{Trio}} = 2.05$	$\tau_p^{MPs} = 2.05$

- $\tau_{\boldsymbol{u}}^{CR} \leq \tau_{\boldsymbol{u}}^{MPs} \leq \tau_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{Trio}}$
- En 3D TrioCFD : $P^1 + P^0 + P^a$

$u_x = sin(2\pi y)(cos(2\pi x) - 1)$, $u_y = -sin(2\pi x)(cos(2\pi y) - 1)$,
$p = sin(2\pi x)sin(2\pi y)$

h	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{CR}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	2.69×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
5.00×10^{-2}	6.92×10^{-3}	5.84×10^{-3}	6.77×10^{-3}
2.50×10^{-2}	1.70×10^{-3}	1.45×10^{-3}	1.66×10^{-3}
1.25×10^{-2}	4.28×10^{-4}	3.65×10^{-4}	4.22×10^{-4}
τ	$\tau_{\boldsymbol{u}}^{CR} = 1.99$	$\tau_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{Trio}} = 2.02$	$\tau_{\boldsymbol{u}}^{MPs} = 1.98$

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|p - p_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	8.35×10^{-1}	1.14×10^{-0}	1.47×10^{-0}
5.00×10^{-2}	4.06×10^{-1}	6.08×10^{-1}	5.75×10^{-1}
2.50×10^{-2}	1.88×10^{-1}	2.89×10^{-1}	2.28×10^{-1}
1.25×10^{-2}	9.50×10^{-2}	1.45×10^{-1}	1.13×10^{-1}
τ	$\tau_p^{CR} = 1.05$	$\tau_p^{\mathrm{Trio}} = 0.99$	$\tau_p^{MPs} = 1.23$

- $\tau_{\boldsymbol{u}} \simeq 2$ et $\tau_p \simeq 1$ -> Ordre de convergence attendu.
- $\|p - p_h^{\mathrm{Trio}}\|_0 \gtrsim \|p - p_h^{Mps}\|_0$

Robustesse par rapport à ν

$u_x = sin(2\pi y)(cos(2\pi x) - 1)$, $u_y = -sin(2\pi x)(cos(2\pi y) - 1)$, $p = x + y - 1$

$\nu[\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}]$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{CR}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{Mps}\|_0$
10^{-0}	2.68×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-1}	2.82×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-2}	8.70×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-3}	8.24×10^{-1}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}

$\nu[\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}]$	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|p - p_h^{Mps}\|_0$
10^{-0}	9.99×10^{-1}	1.40×10^{-0}	2.59×10^{-0}
10^{-1}	1.25×10^{-1}	1.40×10^{-1}	2.59×10^{-1}
10^{-2}	7.66×10^{-2}	1.40×10^{-2}	2.59×10^{-2}
10^{-3}	7.59×10^{-2}	1.40×10^{-3}	2.59×10^{-3}

- L'erreur en vitesse ne dépend plus de la viscosité. Les modes parasites en pression sont nuls.
- En 3D TrioCFD : $P^1 + P^0 + P^a$

$u_x = sin(2\pi y)(cos(2\pi x) - 1)$, $u_y = -sin(2\pi x)(cos(2\pi y) - 1)$, $p = x^5 + x^4y^3 + x^2y + y^4 - 7/12$

$\nu[\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}]$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{CR}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{Mps}\|_0$
10^{-0}	2.69×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-1}	3.35×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.61×10^{-2}
10^{-2}	1.98×10^{-1}	2.45×10^{-2}	2.63×10^{-2}
10^{-3}	1.96×10^{-0}	2.44×10^{-2}	3.48×10^{-2}

$\nu[\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}]$	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|p - p_h^{Mps}\|_0$
10^{-0}	6.53×10^{-1}	8.97×10^{-1}	2.59×10^{-0}
10^{-1}	1.45×10^{-1}	8.99×10^{-2}	2.59×10^{-1}
10^{-2}	1.30×10^{-1}	1.08×10^{-2}	2.70×10^{-2}
10^{-3}	1.30×10^{-0}	6.13×10^{-3}	7.86×10^{-3}

- Cas générale : on est plus robuste par rapport à la viscosité.
- Mps : discrétisation du gradient $\mapsto$ modes parasites en pression nulle

Stokes instationnaire

$u_x = (x-y)^2 e^{-t}, u_y = (x-y)^2 e^{-t}, p = 0$

h	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{CR}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	7.75×10^{-3}	5.22×10^{-3}	8.04×10^{-3}
5.00×10^{-2}	1.84×10^{-3}	1.25×10^{-3}	1.83×10^{-3}
2.50×10^{-2}	4.52×10^{-4}	3.04×10^{-4}	4.49×10^{-4}
τ	$\tau_p^{CR} = 2.05$	$\tau_p^{\mathrm{Trio}} = 2.05$	$\tau_p^{MPs} = 2.08$

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{\mathrm{Trio}}\|_0$	$\|p - p_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	2.89×10^{-2}	6.40×10^{-2}	1.19×10^{-1}
5.00×10^{-2}	1.37×10^{-2}	2.91×10^{-2}	3.98×10^{-2}
2.50×10^{-2}	6.55×10^{-3}	1.42×10^{-2}	1.71×10^{-2}
τ	$\tau_p^{CR} = 1.07$	$\tau_p^{\mathrm{Trio}} = 1.08$	$\tau_p^{MPs} = 1.40$

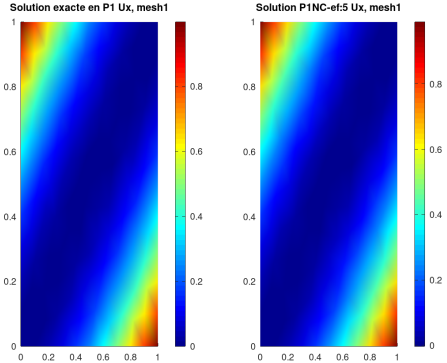


Figure 4 – Vitesse en x

Navier-Stokes [1]

$u_x = e^{x-y}, u_y = e^{x-y}, p = 0, \nu = 1$

h	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{CR}\|_0$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	3.18×10^{-3}	2.35×10^{-3}
5.00×10^{-2}	6.72×10^{-4}	5.58×10^{-4}
2.50×10^{-2}	1.52×10^{-4}	1.40×10^{-4}
τ	$\tau_p^{CR} = 2.19$	$\tau_p^{MPs} = 2.03$

h	$\|p - p_h^{CR}\|_0$	$\|p - p_h^{Mps}\|_0$
1.00×10^{-1}	1.13×10^{-1}	2.51×10^{-1}
5.00×10^{-2}	3.63×10^{-2}	7.82×10^{-2}
2.50×10^{-2}	1.92×10^{-2}	4.33×10^{-2}
τ	$\tau_p^{CR} = 1.28$	$\tau_p^{MPs} = 1.26$

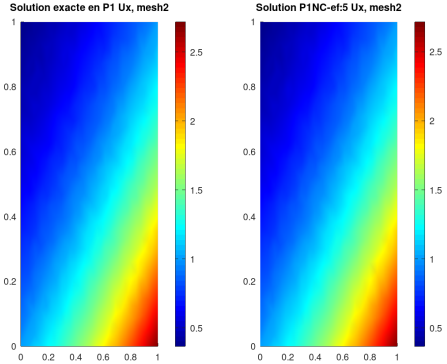


Figure 5 – Vitesse en x

1. L. Gastaldo, R. Herbin, and J.-C. Latché, An unconditionally stable finite element-finite volume pressure correction scheme for the drift-flux model. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 44(2) :251– 287, 2010

Outline

Contexte

Schéma P1NC-MPFA pour Stokes

Résultats Numériques

Perspectives et Conclusion

Navier-Stokes (en cours)

- Terme instationnaire $\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$
- Terme convectif $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$
- Cas tests de benchmark FVCA (en cours)

Implémentation en 3D (prévu)

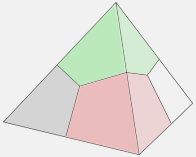


Figure 6 – MPFA en 3D

- Dans TrioCFD
- Nombre de ddls équivalent au 2D (1 par face + 3 par face du bord).

Schéma bien défini (en cours)

- Convergence et Stabilité

Condition de bord (perspective)

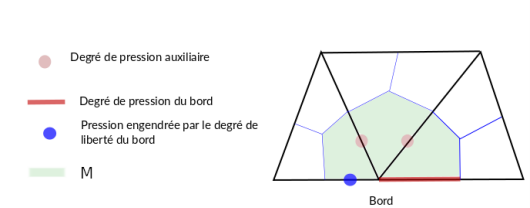


Figure 7 – Support d'une fonction de base MPFA symétrique pour un degré de liberté du bord

- Vitesse imposée sur une épaisseur du bord.

Merci pour votre attention ! Des questions ?

Merci de votre attention !

Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- C. Le Potier : *"A finite volume method for the approximation of highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes (2005)"*
- L. Agelas et R. Masson : *"Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes (2008)"*
- Ph. Emonot : *"Méthode de volumes élements finis : applications aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence (1992)"*
- S. Heib : *"Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée (2003)"*
- T. Fortin : *"Une méthode d'éléments finis à décomposition L2 d'ordre élevé motivée par la simulation des écoulements diphasiques bas Mach (2006)"*
- A. Linke : *"On the role of the Helmhotz-Decomposition in Mixed Methods for Incompressible Flows and a New Variational Crime (2014)"*
- F. Brezzi, J. Douglas et L. D. Marini : *"Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems (1985)"*
- P.-A. Raviart et J.-M. Thomas : *"A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems (1977)"*

Merci de votre attention !

Nouvelle discrétisation du gradient de pression sur Stokes : Bibliographie.

- P. Ciarlet Jr. : *"T-coercivity : application to the discretization of Helmholtz-like problems (2012)"*
- P. Ciarlet Jr., E. Jamelot et A. Lefort : *"Étude de la T-coercitivité pour le problème de Stokes (2021)"*
- E. Chénier, R. Eymard, G. Henry et R. Herbin : *"Volumes finis colocalisés pour des problèmes de convection naturelle 3D : utilisation du solveur direct parallèle MUMPS (2007)"*
- CEA, *"Validation Report TrioCFD v1.8.4 (2021)"*

Merci pour votre attention ! Des questions ?