DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

Étude de la T-coercitivité pour le problème de Stokes

CANUM 2022

P. Ciarlet, Jr, **E. Jamelot**, A. Lefort

erell.jamelot@cea.fr

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, CEA, SERVICE DE THERMO-HYDRAULIQUE ET DE MÉCANIQUE DES FLUIDES, 91191 GIF-SUR-YVETTE, FRANCE

Sommaire

Contexte

La T-coercitivité

Discrétisation non conforme

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Résultats numériques

Sommaire

Contexte

La T-coercitivité

Discrétisation non conforme

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Résultats numériques

- Code TrioCFD : simulation d'écoulements turbulents instationnaires à faible nombre de Mach *dans des configurations industrielles.*
- Trouver $(\mathbf{u}, p)$ (vitesse et pression du fluide) tel que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}\,)\mathbf{u} + \mathbf{grad}\, p & = & \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} & = & 0, \\ \mathbf{u}(t=0) & = & \mathbf{u}_0, \end{array}\right.$$

  avec des conditions aux limites adéquates.

  Discrétisation en espace : éléments finis $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1)$.

  Résolution : schéma en trois étapes.
- Travaux R&D, encadrement de la thèse d'Andrew Peitavy. *Exposé 12h-12h20 (auditorium)*.
- T-coercitivité : un outil pratique pour établir les conditions inf-sup discrètes.

  Éléments finis non conformes : stage de césure d'Albéric Lefort en 2021.

  T-coercivity for solving Stokes problem with nonconforming finite elements Jamelot'22 (soumis).

Sommaire

Contexte

La T-coercitivité

Discrétisation non conforme

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Résultats numériques

- Soient W et V deux espaces de Hilbert, $a : V \times W \to \mathbb{R}$ bilinéaire et continue et $f \in V'$.

$$(Pb) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in W,\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_V.$$

- **Définition :** $a : V \times W \to \mathbb{R}$ bilinéaire et continue est T-coercitive si

$$(TC) \quad \exists T \in \mathcal{L}(V, W), \text{ bijectif}, \exists \alpha > 0, \forall v \in V \quad |a(v, Tv)| \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Si de plus $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors elle est T-coercitive si

$$\exists T \in \mathcal{L}(V, W), \exists \alpha > 0, \forall v \in V \quad |a(v, Tv)| \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

- La T-coercitivité est équivalente aux conditions inf-sup et de solvabilité du théorème BNB.

Pour v donné, on va construire explicitement le représentant w satisfaisant la condition (TC).

- **Théorème :** Soit $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire et continue. On suppose que a est T-coercitive.

Alors le problème (Pb) est bien posé.

- Applications pratiques :

Maxwell Buffa-Costabel-Schwab'02, Helmholtz Ciarlet Jr'12.

Maxwell pour les métamatériaux Bonnet-Ben Dhia, Chesnel, Ciarlet Jr et al.

Diffusion neutronique Ciarlet-Jamelot'13.

- Problème continu

  Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2_{vmn}(\Omega)$ tel que : $\left\{ \begin{array}{rcl} -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p & = & \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} & = & 0. \end{array} \right.$

  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ avec : $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}, \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^\perp$.
- Inégalité de Poincaré-Steklov : $\exists C_{PS} > 0 \,|\quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{PS}\,\|\mathbf{grad}\,v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

  $(v, w)_{H_0^1(\Omega)} = (\mathbf{grad}\,v, \mathbf{grad}\,w)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ et $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\mathbf{grad}\,v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.
- Girault-Raviart'86 : l'opérateur div est un isomorphisme de $\mathbf{V}^\perp$ dans $L^2_{vmn}(\Omega)$.

  $$\forall q \in L^2_{vmn}(\Omega),\ \exists! \mathbf{v}_q \in \mathbf{V}^\perp \,|\quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}_q = q, \quad \|\mathbf{v}_q\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\mathrm{div}}\ \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$
- Problème variationnel

  On pose $\mathcal{X} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2_{vmn}(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert muni de la norme canonique $\|(\mathbf{u}, p)\|_{\mathcal{X}} = \left(\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|p\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$.

  On écrit la formulation variationnelle sous la forme :

  Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{X}$ tel que $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{X}$: $a_S\left((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)\right) = \langle \mathbf{f},\ \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$.

  $$a_S : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{X} \times \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ (\,(\mathbf{u}', p), (\mathbf{v}, q)\,) & \mapsto & \nu\,(\mathbf{u}', \mathbf{v})_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{v}, p')_{L^2(\Omega)} - (\mathrm{div}\,\mathbf{u}', q)_{L^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

  La forme bilinéaire a_S est continue et symétrique. Montrons qu'elle est T-coercitive.
- ENSTA, cours AMS303 Ciarlet'21.

- $a_S\left(\,(\mathbf{u}',p'),(\mathbf{v},q)\,\right) = \nu\,(\mathbf{u}',\mathbf{v})_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} - (\operatorname{div}\mathbf{v},p')_{L^2(\Omega)} - (\operatorname{div}\mathbf{u}',q)_{L^2(\Omega)}$

  Soit $(\mathbf{u}',p')\in\mathcal{X}$. $\quad\exists!\,\mathbf{v}_{p'}\in\mathbf{V}^{\perp}\mid \operatorname{div}\mathbf{v}_{p'}=p'$ tel que $\|\mathbf{v}_{p'}\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\le (C_{\operatorname{div}})^2\,\|p'\|^2_{L^2(\Omega)}$.

1. On pose : $(\mathbf{v}^\star,q^\star) := (\beta\mathbf{u}'-\mathbf{v}_{p'},-\beta\,p')$, avec $\beta>0$. On a :

$$a_S\;\left(\,(\mathbf{u}',p'),\;(\mathbf{v}^\star,q^\star)\,\right) = \nu\,\beta\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} - \nu(\mathbf{u}',\mathbf{v}_{p'})_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \|p'\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

2. On utilise l'inégalité de Young et la majoration C_{div} :

$$\begin{aligned}
-\nu\,(\mathbf{u}',\mathbf{v}_{p'})_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} &\ge -\frac{\eta\,\nu}{2}\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} - \frac{\eta^{-1}\,\nu}{2}\|\mathbf{v}_{p'}\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)},\\
&\ge -\frac{\eta\,\nu}{2}\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} - \frac{\eta^{-1}\,\nu}{2}(C_{\operatorname{div}})^2\|p'\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

3. On obtient :

$$\begin{aligned}
a_S\;\left(\,(\mathbf{u}',p'),\;(\mathbf{v}^\star,q^\star)\,\right) &\ge \nu\left(\beta-\frac{\eta}{2}\right)\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \left(1-\frac{\nu\,\eta^{-1}}{2}(C_{\operatorname{div}})^2\right)\|p'\|^2_{L^2(\Omega)},\\
&\ge C_{\min}\,\|(\mathbf{u}',p')\|^2_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

avec $C_{\min} = \min\left(\nu\left(\beta-\frac{\eta}{2}\right),1-\frac{\nu\,\eta^{-1}}{2}(C_{\operatorname{div}})^2\right)$.

- Considérons $\beta=\eta$ et $\eta=\nu\,(C_{\operatorname{div}})^2$. On obtient alors : $C_{\min} = \frac{1}{2}\min\left((\nu\,C_{\operatorname{div}})^2\,,\,1\right)$.

- L'opérateur T tel que $T(\,(\mathbf{u}', p')\,) = (\mathbf{v}^\star, p^\star)$ est linéaire et continu :

$$T(\,(\mathbf{u}', p')\,) = (\,\beta\mathbf{u}' - \mathbf{v}_{p'}, -\beta\, p'\,).$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}^\star\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} &\leq 2\left(\beta^2\,\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \|\mathbf{v}_{p'}\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\right),\\
&\leq 2\left(\beta^2\,\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (C_{\mathrm{div}})^2\,\|p'\|^2_{L^2(\Omega)}\right),\\
\|\mathbf{v}^\star\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \|p^\star\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2\,\beta^2\,\|\mathbf{u}'\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} + \left(2\,(C_{\mathrm{div}})^2 + \beta^2\right)\,\|p'\|^2_{L^2(\Omega)},\\
&\leq (C_{\max})^2\,\|(\mathbf{u}', p')\|^2_{\mathcal{X}},
\end{aligned}$$

avec $C_{\max} = \max\left(2\,\beta^2\,,\,2\,(C_{\mathrm{div}})^2 + \beta^2\right)^{1/2}$.

- Considérons $\beta = \eta$ et $\eta = \nu\,(C_{\mathrm{div}})^2$.

  On obtient alors : $C_{\max} = C_{\mathrm{div}}\ \max\left(2\,(\nu\,C_{\mathrm{div}})^2\,,\,2 + (\nu\,C_{\mathrm{div}})^2\right)^{1/2}$.

- La forme bilinéaire, continue et symétrique $a_S\,(\cdot,\cdot)$ est T-coercitive,

  le problème (Pb) est bien posé !

$$a_S\,\left(\,(\mathbf{u}', p'),\,(\mathbf{v}^\star, q^\star)\,\right) \;\geq\; C_{\min}\,(C_{\max})^{-1}\,\|(\mathbf{u}', p')\|_{\mathcal{X}}\,\|(\mathbf{v}^\star, q^\star)\|_{\mathcal{X}}.$$

- Calcul *pédagogique*, $\beta = \eta$ et $\eta = \nu\,(C_{\mathrm{div}})^2$:

  $$C_{\min} = \frac{1}{2}\min\Big((\nu\,C_{\mathrm{div}})^2\,,\,1\Big) \quad \text{et} \quad C_{\max} = C_{\mathrm{div}}\ \max\Big(2\,(\nu\,C_{\mathrm{div}})^2\,,\,2+(\nu\,C_{\mathrm{div}})^2\Big)^{1/2}.$$

  Lorsque $\nu \to 0$, $\quad C_{\min}\,(C_{\max})^{-1} \to \dfrac{(\nu\,C_{\mathrm{div}})^2}{2\sqrt{2}\,C_{\mathrm{div}}}$.

- Calcul *spécialisé*, $\beta = \dfrac{1+\eta}{2}$ et $\eta = \dfrac{\nu\,(C_{\mathrm{div}})^2}{2\,(1-\nu/2)}$ $(\nu < 2)$:

  $$C_{\min} = \frac{\nu}{2} \quad \text{et} \quad C_{\max} = \max(2\,\beta^2\,,\,\beta^2 + 2\,(C_{\mathrm{div}})^2)^{1/2}.$$

  Lorsque $\nu \to 0$, $\quad C_{\min}\,(C_{\max})^{-1} \to \nu\ \max\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}+2\,(C_{\mathrm{div}})^2\right)^{-1/2}$.

  Meilleure dépendance en ν.

- La constante C_{div} est difficile à estimer.

  Estimation continue de C_{div} pour $d = 2$, Costabel-Dauge'15 : $\quad C_{\mathrm{div}} \le \dfrac{h_\Omega}{\rho_\Omega}$.

  Estimation discrète de C_{div} : Gallistl'19.

Sommaire

Contexte

La T-coercitivité

Discrétisation non conforme

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Résultats numériques

Maillage

- Domaine Ω polygonal ou polyédrique de frontière Lipschitzienne.

  Famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_h$, avec $h \to 0$.
- Triangulation régulière de simplexes : $\mathcal{T}_h = \bigcup_K K$.

  Ensemble des facettes : $\mathcal{F}_h = \bigcup_F F = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$;

  $\mathcal{F}_h^i$ (resp. $\mathcal{F}_h^b$) : facettes intérieures (resp. du bord).

  Vecteur orthonormaux aux facettes : $(\mathbf{n}_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ ($\mathbf{n}_F$ orienté vers l'extérieur si $F \in \partial\Omega$).
- h_K : diamètre de l'élément K, $\quad \rho_K$: diamètre de la boule inscrite dans K,

$$\exists \sigma > 0 \,|\, \forall h,\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

- Pour $d = 2$, $\sigma \geq \left(\dfrac{\pi}{2\,\theta}\right)^{1/2}$ où θ est le plus petit angle de la triangulation.
- Pour $d = 3$, $\sigma \geq \left(\dfrac{\pi}{2\,\omega}\right)^{1/3}$ où ω est le plus petit angle solide de la triangulation.

Forme bilinéaire $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_h$ et opérateur div_h

- Fonctions régulières par morceaux.
- $\mathcal{P}_h H^1 = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_{|K} \in H^1(K) \right\}$.

$$\forall v,\ w \in \mathcal{P}_h H^1, \quad (v, w)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{grad}\, v, \mathbf{grad}\, w)_{\mathbf{L}^2(K)}, \quad \|v\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{grad}\, v\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2.$$

$\mathcal{P}_h \mathbf{H}^1 = (\mathcal{P}_h H^1)^d$,

$$\forall \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathcal{P}_h \mathbf{H}^1, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w})_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{Grad}\, \mathbf{v}, \mathbf{Grad}\, \mathbf{w})_{\mathbb{L}^2(K)}, \quad \|\mathbf{v}\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{Grad}\, \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(K)}^2.$$

- Sauts aux interfaces pour $v \in \mathcal{P}_h H^1$:

  Pour $F \in \mathcal{F}_h^i$, $\overline{F} = \overline{K}_L \cap \overline{K}_R$, $\mathbf{n}_F$ orienté de K_L vers K_R $[v]_{|F} = \left(v_{|K_L} - v_{|K_R} \right)_{|F}$.

  Pour $F \in \mathcal{F}_h^b$, $[v]_{|F} = v_{|F}$.
- $\mathcal{P}_h \mathbf{H}(\mathrm{div}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \mathbf{v}_{|K} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,; K) \right\}$.

  Opérateur div_h :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}_h \mathbf{H}(\mathrm{div}),\ \forall q \in L^2(\Omega), \quad (\mathrm{div}_h\, \mathbf{v}, q) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathrm{div}\, \mathbf{v}, q)_{L^2(K)}.$$

- Méthode introduite dans Crouzeix-Raviart'73.
- Approximation non conforme de $H^1(\Omega)$:

$$X_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad v_{|K} \in P^k(K) \quad \text{et} \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^i,\ \forall q \in P^{k-1}(F) \quad \int_F [v]\, q = 0 \right\}.$$

- Approximations non conformes de $H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$:

$$X_{0,h} = \left\{ v \in X_h \,|\, \forall F \in \mathcal{F}_h^b,\ \forall q \in P^{k-1}(F) \quad \int_F v\, q = 0 \right\}, \quad \mathbf{X}_{0,h} = (X_{0,h})^d.$$

Patch test : $v \to \|v\|_h$ est une norme sur $X_{0,h}$.

- Approximation de $L^2_{vmn}(\Omega)$:

$$Q_h = \left\{ q \in L^2_{vmn}(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad q_{|K} \in P^{k-1}(K) \right\}.$$

- Approximation de $\mathcal{X} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2_{vmn}(\Omega)$:

$$\mathcal{X}_h := \mathbf{X}_{0,h} \times Q_h, \quad \|(\mathbf{v}, q)\|_{\mathcal{X}_h} = \left(\|\mathbf{v}\|_h^2 + \|q\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

$\mathcal{X}_h$ est un espace de Hilbert.

Propriété d'approximabilité : il existe $\Pi_h \in \mathcal{L}\left(\mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{X}_h\right)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} \exists \widetilde{C} > 0 \,|\, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) & \|\Pi_h \mathbf{v}\|_h & \leq & \widetilde{C}\, \|\mathbf{Grad}\, \mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) & \mathrm{div}_h\, \Pi_h \mathbf{v} & = & \mathrm{div}_h\, \mathbf{v}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{P}^k(\Omega) & \Pi_h \mathbf{v} & = & \mathbf{v}. \end{array} \right.$$

T-coercitivité discrète (i)

- On introduit la forme bilinéaire :

$$a_{S,h} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{X}_h \times \mathcal{X}_h & \to & \mathbb{R}, \\ \big((\mathbf{u}'_h, p'_h), (\mathbf{v}_h, q_h) \big) & \mapsto & \nu\, (\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}_h)_h - (\mathrm{div}_h\, \mathbf{v}_h, p'_h) - (\mathrm{div}_h\, \mathbf{u}'_h, q_h). \end{array} \right.$$

- Problème variationnel (Pb_h) :

  Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{X}_h$ tel que $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{X}_h, \quad a_{S,h}\big((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h) \big) = \ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h),$

- Calcul du second membre :

  Pour $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

  Pour $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $\ell_{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_h) = \langle\, \mathbf{f}, \mathcal{I}_h(\mathbf{v}_h)\, \rangle_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)}$ Veeser-Zanotti'18.

- Étapes pour montrer la T-coercitivité discrète.

  On cherche un représentant $(\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h)$ de $(\mathbf{u}'_h, p'_h)$ réalisant la condition inf-sup.

  Soit $p'_h \in Q_h \subset L^2_{vmn}(\Omega)$. On considère $\mathbf{v}_{p'_h} \in \mathbf{V}^\perp$ tel que

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v}_{p'_h} = p'_h \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_{p'_h}\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} \leq C_{\mathrm{div}}\ \|p'_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

  On pose $\mathbf{v}_{h,p'_h} = \Pi_h \mathbf{v}_{p'_h}$. On a donc :

$$\mathrm{div}_h\, \mathbf{v}_{h,p'_h} = p'_h \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_{h,p'_h}\|_h \leq \widetilde{C}_{\mathrm{div}}\ \|p'_h\|_{L^2(\Omega)},$$

  avec $\widetilde{C}_{\mathrm{div}} = \widetilde{C}\, C_{\mathrm{div}}$.

- $a_{S,h}\left(\,(\mathbf{u}'_h, p'_h), (\mathbf{v}_h, q_h)\,\right) = \nu\,(\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}_h)_h - (\mathrm{div}_h\,\mathbf{v}_h, p'_h) - (\mathrm{div}_h\,\mathbf{u}'_h, q_h)$.
  Soit $(\mathbf{u}'_h, p'_h) \in \mathcal{X}_h$. $\quad \exists!\,\mathbf{v}_{p'_h} \in \mathbf{V}^\perp \mid \mathrm{div}\,\mathbf{v}_{p'_h} = p'_h$ et $\|\mathbf{v}_{p'_h}\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} \leq (C_{\mathrm{div}})^2\,\|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)}$.

  On pose $\mathbf{v}_{h,p'_h} = \Pi_h \mathbf{v}_{p'_h}$. On a : $\mathrm{div}_h\,\mathbf{v}_{h,p'_h} = p'_h$ et $\|\mathbf{v}_{h,p'_h}\|^2_h \leq (\widetilde{C}_{\mathrm{div}})^2\,\|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)}$.

1. On choisit : $(\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h) := \left(\widetilde{\beta}\,\mathbf{u}'_h - \mathbf{v}_{h,p'_h}\,,\ -\widetilde{\beta}\,p'_h\right)$, avec $\widetilde{\beta} > 0$. On a :
$$a_{S,h}\,\left(\,(\mathbf{u}'_h, p'_h),\ (\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h)\,\right) = \nu\,\widetilde{\beta}\|\mathbf{u}'_h\|^2_h - \nu\,\left(\mathbf{u}'_h\,,\,\mathbf{v}_{h,p'_h}\right)_h + \|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)}.$$
2. On utilise l'inégalité de Young et la majoration $\widetilde{C}_{\mathrm{div}}$:
$$\begin{aligned} -\nu\,\left(\mathbf{u}'_h, \mathbf{v}_{h,p'_h}\right)_h &\geq -\frac{\nu\,\widetilde{\eta}}{2}\,\|\mathbf{u}'_h\|^2_h - \frac{\nu\,\widetilde{\eta}^{-1}}{2}\,\|\mathbf{v}_{h,p'_h}\|^2_h, \\ &\geq -\frac{\nu\,\widetilde{\eta}}{2}\,\|\mathbf{u}'_h\|^2_h - \frac{\nu\,\widetilde{\eta}^{-1}}{2}\,(\widetilde{C}_{\mathrm{div}})^2\,\|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$
3. On obtient :
$$\begin{aligned} a_{S,h}\,\left(\,(\mathbf{u}'_h, p'_h),\ (\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h)\,\right) &\geq \nu\,\left(\widetilde{\beta} - \frac{\widetilde{\eta}}{2}\right)\,\|\mathbf{u}'_h\|^2_h + \left(1 - \frac{\nu\,\widetilde{\eta}^{-1}}{2}\,(\widetilde{C}_{\mathrm{div}})^2\right)\,\|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &\geq \widetilde{C}_{\min}\,\|(\mathbf{u}'_h, p'_h)\|^2_{\mathcal{X}_h}, \end{aligned}$$
   avec $\widetilde{C}_{\min} = \min\left(\nu\,\left(\widetilde{\beta} - \frac{\widetilde{\eta}}{2}\right), 1 - \frac{\nu\,\widetilde{\eta}^{-1}}{2}\,\widetilde{C}^2_{\mathrm{div}}\right)$.

- Considérons $\widetilde{\beta} = \widetilde{\eta}$ et $\widetilde{\eta} = \nu\,(\widetilde{C}_{\mathrm{div}})^2$. On obtient alors : $\widetilde{C}_{\min} = \dfrac{1}{2}\,\min\left(\,(\nu\,\widetilde{C}_{\mathrm{div}})^2\,,\,1\right)$.

T-coercitivité discrète (iii)

- L'opérateur T_h tel que $T_h(\,(\mathbf{u}'_h, p'_h)\,) = (\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h)$ est linéaire et continu :
  $T_h(\,(\mathbf{u}'_h, p'_h)\,) = (\widetilde{\beta}\,\mathbf{u}'_h - \mathbf{v}_{h,p'_h}, -\widetilde{\beta}\,p'_h)$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}^\star_h\|_h^2 + \|q^\star_h\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2\,\widetilde{\beta}^2\|\mathbf{u}'_h\|_h^2 + 2\,\|\mathbf{v}_{h,p'_h}\|_h^2 + \widetilde{\beta}^2\|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)},\\
&\leq 2\,\widetilde{\beta}^2\|\mathbf{u}'_h\|_h^2 + \left(2\,(\widetilde{C}_{\mathrm{div}}\,)^2 + \widetilde{\beta}^2\right)\,\|p'_h\|^2_{L^2(\Omega)},\\
&\leq (\widetilde{C}_{\max})^2\,\|(\mathbf{u}'_h, p'_h)\|^2_{\mathcal{X}_h},
\end{aligned}$$

  avec $\widetilde{C}_{\max} = \max\left(2\,\widetilde{\beta}^2\,,\,2\,(\widetilde{C}_{\mathrm{div}}\,)^2 + \widetilde{\beta}^2\right)^{1/2}$.

- La forme bilinéaire, continue et symétrique $a_{S,h}$ est T-coercitive,
  le problème (Pb_h) est bien posé!

$$a_{S,h}\,\left(\,(\mathbf{u}'_h, p'_h),\,(\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h)\,\right) \geq \widetilde{C}_{\min}\,(\widetilde{C}_{\max})^{-1}\,\|(\mathbf{u}'_h, p'_h)\|_{\mathcal{X}_h}\,\|(\mathbf{v}^\star_h, q^\star_h)\|_{\mathcal{X}_h}.$$

- Calcul *pédagogique* : $\widetilde{C}_{\min}\,(\widetilde{C}_{\max})^{-1} \to \dfrac{(\nu\,\widetilde{C}_{\mathrm{div}}\,)^2}{2\,\sqrt{2}\,\widetilde{C}_{\mathrm{div}}}$.
- Calcul *spécialisé* : $\widetilde{C}_{\min}\,(\widetilde{C}_{\max})^{-1} \to \nu\,\max\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4} + 2\,(\widetilde{C}_{\mathrm{div}}\,)^2\right)^{-1/2}$.
- Analyse de convergence à l'aide du second lemme de Strang Ern-Guermond'21-II :

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (p - p_h)\|_{\mathcal{X}_h} \lesssim \inf_{(\mathbf{v}_h, q_h)\in\mathcal{X}_h} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), (p - q_h)\|_{\mathcal{X}_h} + \epsilon_h(\mathbf{u}, p),$$

  où $\epsilon_h(\mathbf{u}, p)$ est l'erreur de consistance.

Sommaire

Contexte

La T-coercitivité

Discrétisation non conforme

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Résultats numériques

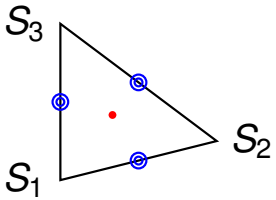
- Espace mixte : $\mathcal{X}_{cr} = \mathbf{X}_{cr} \times Q_{cr}$, Crouzeix-Raviart'73.

$$\mathbf{X}_{cr} = (X_{cr})^d, \quad X_{cr} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad v_{h|K} \in P^1(K) \,;\, \forall F \in \mathcal{F}_h \quad \int_F [v_h] = 0 \right\},$$

$$Q_{cr} = \left\{ q_h \in L^2_{vmn}(\Omega) \,|\, \forall K \in \mathcal{T}_h \quad q_{h|K} \in P^0(K) \right\}.$$

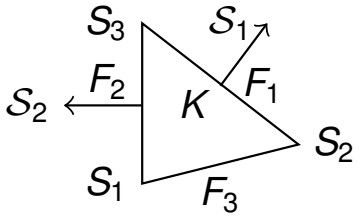
$X_{cr} = \mathrm{vect}\left((\psi_F)_{F \in \mathcal{F}_h} \right)$, avec : $\psi_{F|K} := \begin{cases} 0 & \text{si } F \notin \partial K, \\ 1 - d\lambda_{S_F,K} & \text{si } F \in \partial K. \end{cases}$

- Degrés de liberté :



Vitesse, pression.

Coordonnées barycentriques :



$\lambda_{S_i,K} = (d|K|)^{-1}(\vec{OS_i} - \mathbf{x}) \cdot \mathcal{S}_{F_i,K}$.

On a : $\mathbf{grad}\, \psi_{F|K} = -d\, \mathbf{grad}\, \lambda_{S_F,K} = |K|^{-1} \mathcal{S}_{F,K}$.

- Opérateur d'interpolation scalaire : $\pi_{cr} : H^1(\Omega) \to X_{cr}$, $\pi_{cr} v = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \left(\frac{1}{|F|} \int_F v \right) \psi_F$.

Opérateur d'interpolation vectoriel : $\Pi_{cr} \mathbf{v} = (\, \pi_{cr} v_i \,)_{i=1}^d$.

- Apel-Nicaise-Schöberl'01, Lemma 2 :

  $$\mathbf{grad}\,\pi_{cr} v_{|K} = |K|^{-1} \int_K \mathbf{grad}\,\pi_{cr} v = |K|^{-1} \int_{\partial K} \pi_{cr} v\,\mathbf{n} = |K|^{-1} \int_{\partial K} v\,\mathbf{n} = |K|^{-1} \int_K \mathbf{grad}\, v.$$

  $$|\mathbf{grad}\,\pi_{cr} v_{|K}| \leq |K|^{-1/2} \|\mathbf{grad}\, v\|_{L^2(K)} \Rightarrow \quad \|\mathbf{grad}\,\pi_{cr} v\|_{L^2(K)} \leq \|\mathbf{grad}\, v\|_{L^2(K)}.$$

  Pour $v \in H^1(\Omega)$, on a : $\|\pi_{cr} v\|_h \leq \|\mathbf{grad}\, v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, d'où : $\|\Pi_{cr}\mathbf{v}\|_h \leq \|\mathbf{Grad}\,\mathbf{v}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$.

- Pour $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on a pour tout $K \in \mathcal{T}_h$:

  $$\int_K \operatorname{div} \Pi_{cr}\mathbf{v} = \int_K \sum_{F \in \partial K} |K|^{-1} \frac{\int_F \mathbf{v} \cdot \mathcal{S}_{F,K}}{|F|} = \sum_{F \in \partial K} \int_F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{F,K} = \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

  Pour $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on a : $\operatorname{div}_h \Pi_{cr}\mathbf{v} = \operatorname{div}_h \mathbf{v}$.

- Soit $(\mathbf{u}'_h, p'_h) \in \mathcal{X}_h$. On pose $(\mathbf{v}^\star_h, p^\star_h) = (\beta \mathbf{u}'_h - \mathbf{v}_{h,p'_h}, -\beta p'_h)$ où $\mathbf{v}_{h,p'_h} = \Pi_{cr}\mathbf{v}_{p'_h}$.

  On a :

  $$a_{S,h}\left((\mathbf{u}'_h, p'_h), (\mathbf{v}^\star_h, p^\star_h) \right) \geq C_{\min} \left(C_{\max}\right)^{-1} \|(\mathbf{u}'_h, p'_h)\|_{\mathcal{X}_h} \|(\mathbf{v}^\star_h, p^\star_h)\|_{\mathcal{X}_h}.$$

- EF mixtes non conformes d'ordre 1 : $\widetilde{C} = \widetilde{C}_{cr} = 1$ (Crouzeix-Raviart, $d = 2, 3$).

  La constante de stabilité ne dépend pas de la régularité du maillage !

- EF mixtes non conformes d'ordre 2 : $\widetilde{C} = \widetilde{C}_{fs} \propto \sigma^2$ (Fortin-Soulié, $d = 2$).

Sommaire

Contexte

La T-coercitivité

Discrétisation non conforme

Éléments finis mixtes non conformes de Crouzeix-Raviart ($k = 1$)

Résultats numériques

- Cas où $\mathbf{f} = \mathbf{grad}\,\phi$ avec $\phi \in H^1(\Omega) \cap L^2_{vmn}(\Omega)$

  La solution continue est : $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, \phi)$.

  Convergence de la vitesse : $\|\mathbf{u}_h\|_h \lesssim h^2 \, \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \,\mathrm{div}\, \mathbf{v}_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \phi \,[\mathbf{v}_h]\,\mathbf{n}.$$

- Le second terme agit comme une source numérique.
  Pour le supprimer (ou le réduire), on peut :

  Construire un sous-espace de $\mathbf{X}_h \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}0; \Omega)$: Hecht'00.

  Ajouter une contrainte : thèses de Fortin'03 et Heib'06. Implémentation dans le code TrioCFD.

  $2D$: Éléments finis $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1)$.

  $3D$: Éléments finis $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1 + P^a)$.

  Projeter $\mathbf{v}_h$ au second membre dans un espace d'éléments finis conformes dans $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,; \Omega)$.

  Linke et al.

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \Pi_{RT} \mathbf{v}_h = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \,\mathrm{div}\, \Pi_{RT} \mathbf{v}_h = -\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi \,\mathrm{div}\, \mathbf{v}_h.$$

  Traitement plus complexe pour les équations de Navier-Stokes.

- Problème de Stokes dans $\Omega = (0,1)^2$ avec :

  $\mathbf{u} = 0, \quad p = x^3 + y^3 - 0.5, \quad \mathbf{f}_g = \mathbf{grad}\, p = 3\left(x^2, y^2\right)^T.$

- Projection sur les EF de Raviart-Thomas Gatica'14, Lemma 3.11.

  Crouzeix-Raviart : $\Pi_{RT_0}(\psi_f \mathbf{e}_{x,y})_{|K} = (d|K|)^{-1}\left(\mathbf{x} - \vec{OS}_{f,K}\right)\mathcal{S}_{f,K} \cdot \mathbf{e}_{x,y}$.

  Fortin-Soulié : $\Pi_{RT_1}(\mathbf{v}_h)_{|K} = \mathbb{A}_K \mathbf{x} + (\mathbf{b}_K \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{d}_K$. Passage par l'élément de référence.

- Valeurs de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ pour $h = 5.00 \times 10^{-2}$

ν	$\mathbf{X}_{CR}$	$\mathbf{X}_{CR} + \Pi_{RT_0}$	$\mathbf{X}_{FS}$	$\mathbf{X}_{FS} + \Pi_{RT_1}$
1.00×10^{-0}	3.19×10^{-4}	1.34×10^{-18}	3.53×10^{-7}	9.09×10^{-19}
1.00×10^{-3}	3.19×10^{-1}	1.34×10^{-15}	3.53×10^{-4}	9.09×10^{-16}
1.00×10^{-4}	3.19×10^{-0}	1.34×10^{-14}	3.53×10^{-3}	9.09×10^{-15}

- Problème de Stokes dans $\Omega = (0,1)^2$ avec :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} (1-\cos(2\,\pi\,x))\,\sin(2\,\pi\,y) \\ (\cos(2\,\pi\,y)-1)\,\sin(2\,\pi\,x) \end{pmatrix}, \quad p = \sin(2\,\pi\,x)\,\sin(2\,\pi\,y), \quad \mathbf{f}_s = -\nu\,\Delta\mathbf{u} + \mathbf{grad}\,p.$$

- Valeurs de $\varepsilon_0(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} / \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$

Pour $\nu = 1.00 \times 10^{-3}$:

h	$\mathbf{X}_{CR}$	$\mathbf{X}_{CR} + \Pi_{RT_0}$	$\mathbf{X}_{FS}$	$\mathbf{X}_{FS} + \Pi_{RT_1}$
5.00×10^{-2}	5.66×10^{-1}	1.13×10^{-2}	2.35×10^{-3}	2.06×10^{-4}
2.50×10^{-2}	1.33×10^{-1}	2.89×10^{-3}	3.21×10^{-4}	2.59×10^{-5}
1.25×10^{-2}	3.88×10^{-2}	5.40×10^{-4}	4.20×10^{-5}	3.40×10^{-6}
6.25×10^{-3}	8.40×10^{-3}	1.79×10^{-4}	5.04×10^{-6}	4.15×10^{-7}
Taux	$h^{2.05}$	$h^{2.07}$	$h^{2.96}$	$h^{2.98}$

- Pour $\nu = 1.00 \times 10^{-4}$:

h	$\mathbf{X}_{CR}$	$\mathbf{X}_{CR} + \Pi_{RT_0}$	$\mathbf{X}_{FS}$	$\mathbf{X}_{FS} + \Pi_{RT_1}$
5.00×10^{-2}	5.66×10^{-0}	1.13×10^{-2}	2.35×10^{-2}	2.06×10^{-4}
2.50×10^{-2}	1.33×10^{-0}	2.89×10^{-3}	3.20×10^{-3}	2.59×10^{-5}
1.25×10^{-2}	3.38×10^{-1}	5.40×10^{-4}	4.20×10^{-4}	3.40×10^{-6}
6.25×10^{-3}	8.40×10^{-2}	1.79×10^{-4}	5.04×10^{-5}	4.15×10^{-7}
Taux	$h^{2.05}$	$h^{2.07}$	$h^{2.96}$	$h^{2.98}$

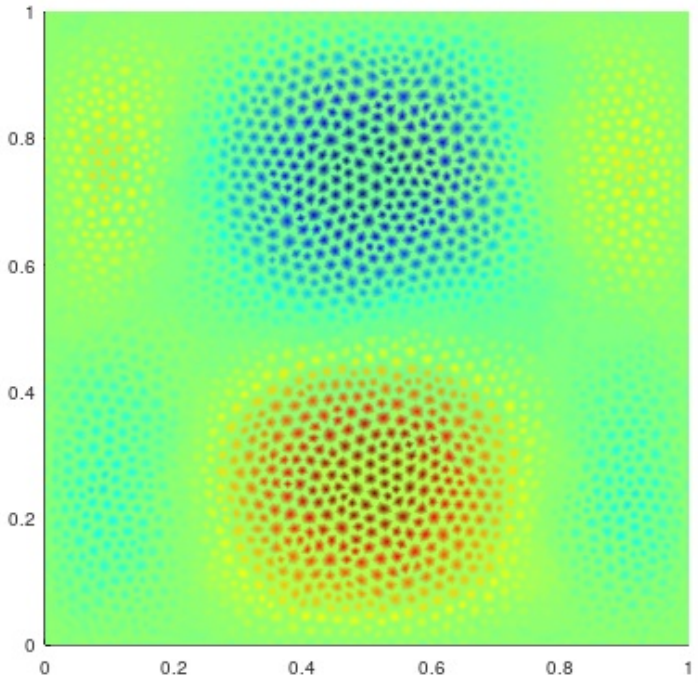
Sans la projection, $\varepsilon_0(\mathbf{u}) \propto \nu^{-1}$. Avec la projection, $\varepsilon_0(\mathbf{u})$ est indépendant de ν.

Élements finis non conformes : intérêt de la projection Π_{RT_k} (iii)

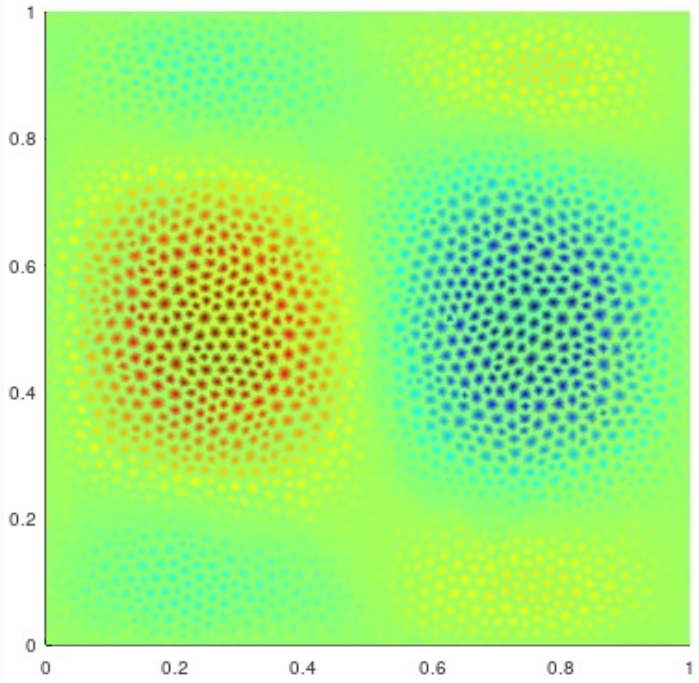
- Solution du problème de Stokes discret dans $\Omega = (0,1)^2$ avec :

$$a_{S,h}\left((\delta \mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, p_h) \right) = \int_\Omega \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{v}_h - \int_\Omega \mathbf{f}_s \cdot \Pi_{RT} \mathbf{v}_h.$$

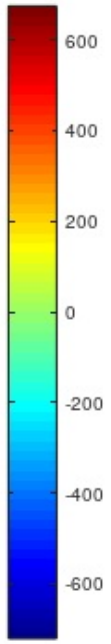
- $\mathbf{X}_{FS}, \quad h = 2.50 \times 10^{-2} \quad \text{et} \quad \nu = 1.00 \times 10^{-4}.$



Valeurs de $\delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_x$



Valeurs de $\delta \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_y$



- Étude pour les éléments finis de Crouzeix-Raviart et Fortin-soulié ($d = 2$) :
  T-coercitivity for solving Stokes problem with nonconforming finite elements, J., soumis
  Résultats numériques : `https://github.com/cea-trust-platform/Stokes_NCFEM`

- Poursuite de l'étude de la T-coercitivité discrète les éléments finis non conformes :
  Éléments finis de Fortin-Soulié : étudier le cas $d = 3$.
  Éléments finis du code TrioCFD $\mathbf{P}^1_{nc} - (P^0 + P^1)$ (en cours).

- Éléments finis de Galerkin discontinus : stage de M2 (et thèse) de Mayssa Mroueh en 2022.
  Étudier les méthodes de projection de Kreuzer-Verfürth-Zanotti'21.

Merci !