

# Un schéma numérique préservant l'asymptotique bas Mach pour les équations d'Euler

Paola ALLEGRINI

Travail en collaboration avec Marie-Hélène VIGNAL



CANUM 2022

**Minisymposium**

Méthodes numériques avancées pour les modèles fluides en physique des plasmas

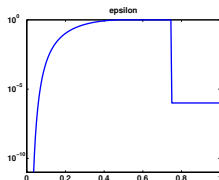
## Contexte général

### Modèle multi-échelles : $M_\varepsilon$ depend d'un parametre $\varepsilon$

Dans le domaine (espace-temps)  $\varepsilon$  peut

- être très petit comparé à l'échelle de référence
- être du même ordre que l'échelle de référence
- prendre des valeurs intermédiaires

Quand  $\varepsilon$  est petit :  $M_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon$  modèle asympt.



### Difficultés :

- Schémas classiques explicites pour  $M_\varepsilon$  : stables et consistants si le maillage résout toutes les échelles de  $\varepsilon \Rightarrow$  **coût énorme**
- Schémas pour  $M_0$  avec des maillages indépendants de  $\varepsilon$

**Mais :**  $\Rightarrow M_0$  n'est pas valide partout, il faut  $\varepsilon \ll 1$

$\Rightarrow$  localisation de l'interface, interface mobile

## Principe des schémas AP

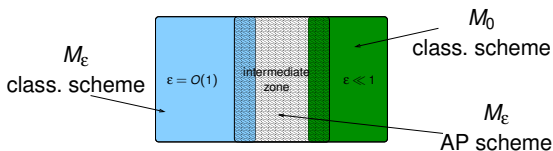
**Une solution** : utiliser un schéma AP : Asymptotiquement Préservant

- Permet d'utiliser le modèle multi-échelles  $M_\epsilon$  partout.
- Avec une discrétisation préservant l'asymptotique  $\epsilon \rightarrow 0$  :
  - ➔ **Asymptotiquement stable** : Maillage indépendant de  $\epsilon$ .
  - ➔ **Asymptotiquement consistant** : On obtient une approximation de la solution de  $M_0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

⇒ **Schéma asymptotiquement préservant (AP)**

([S.Jin] cinétique → fluide)

- Possibilité d'utiliser le schéma AP pour reconnecter  $M_\epsilon$  et  $M_0$



## Modèle d'Euler complet pour le régime bas Mach

$$(M_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, & (1_\varepsilon) \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = 0, & (2_\varepsilon) \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) u) = 0, & (3_\varepsilon) \\ E = \frac{p}{\gamma - 1} + \varepsilon \frac{\rho |u|^2}{2} & (4_\varepsilon) \end{cases}$$

**Paramètre :**  $\varepsilon = \gamma M^2 > 0$  avec  $M = u_0/c_0$

$M = \text{nbre. de Mach}$

$c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} = \text{vitesse du son}$

## Conditions aux limites et initiales

$u \cdot \nu = 0$ , sur  $\partial\Omega$ , et  $\rho(x, 0), u(x, 0), p(x, 0)$  données initiales

## Formalisme système

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) = 0,$$

avec  $W = (\rho, q, E)$ , où  $q = \rho u$  et  $F(W) = (q, \rho u \otimes u + 1/(\varepsilon p) \text{Id}_{\mathbb{R}^3}, (E + p)u)$ .

Valeurs propres de  $DF(W)$  :

▸  $u - \sqrt{\frac{\gamma p}{\varepsilon \rho}}$  et  $u + \sqrt{\frac{\gamma p}{\varepsilon \rho}} \rightarrow \pm\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

▸  $u$  : vitesse du fluide

## Limite bas Mach $\varepsilon \rightarrow 0$

### Limites rigoureuses

- ➡ Cadre isentropique  $p = p(\rho) = \rho^\gamma$   
[Klainerman, Majda, 81, 82], [Schochet, 86], [Lions, Masmoudi, 98]
- ➡ Euler complet [Métivier, Schochet, 01, 03], [Alazard, 05]

### Limite formelle *avec des données bien préparées*

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (1_\varepsilon) \quad \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = 0, \quad (2_\varepsilon)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) u) = 0, \quad (3_\varepsilon) \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \varepsilon \frac{\rho |u|^2}{2}. \quad (4_\varepsilon)$$

$$(2_\varepsilon), (4_\varepsilon) \Rightarrow \nabla p = 0 \text{ et } E = p/(\gamma - 1) \Rightarrow p(x, t) = p(t) \text{ et } E(x, t) = E(t)$$

$$\int_\Omega (3_\varepsilon) \Rightarrow |\Omega| E'(t) + (E(t) + p(t)) \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu = 0 \Rightarrow E \text{ et } p \text{ constants}$$

$$(3_\varepsilon) \Rightarrow \nabla \cdot u = 0 \quad \text{régime incompressible}$$

## Modèle limite : Euler incompressible / Reformulation

$$(M_0) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, & (1_0) \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p_1 = 0, & (2_0) \\ \nabla \cdot u = 0 & (3_0) \end{cases}$$

où  $p_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (p - \bar{p}_0)$ , avec  $p(x, t) = \bar{p}_0 + \varepsilon p_1(x, t) + o(\varepsilon)$

Equation elliptique explicite pour  $p_1$  :

$$(1_0) \text{ dans } (2_0) \quad \Rightarrow \quad \rho \partial_t u + (1_0)u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p_1 = 0 \quad (*)$$

$$\nabla \cdot ((*)/\rho) \text{ et } \partial_t(3_0) \quad \Rightarrow \quad \partial_t \nabla \cdot u + \nabla \cdot ((u \cdot \nabla)u) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p_1 \right) = 0$$

## Modèle limite reformulé

$$(MR_0) \begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla_x (\rho u) = 0, & (1_{R_0}) \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p_1 = 0, & (2_{R_0}) \\ -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p_1 \right) = \nabla \cdot ((u \cdot \nabla)u) & (3_{R_0}) \end{cases}$$

## Objectifs

### Construire un schéma AP qui préserve cette limite

#### ➡ Contrainte sur le pas de temps (CFL) indépendante de $\varepsilon$

- Schémas explicites :  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u| + \sqrt{\frac{\gamma p}{\varepsilon \rho}}} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

- Schémas implicites : inconditionnellement stables

#### ➡ Consistance avec le modèle limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ : $p$ cst, $\nabla \cdot u = 0$

- Schémas explicites : non consistants dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$

- Schémas implicites : consistants dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$

#### ➡ Avec un coût raisonnable à chaque pas de temps

- Impliciter le moins de termes possibles

### IMEX (Implicit-Explicit) schemes

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} + \nabla \cdot F_e(W^n) + \nabla \cdot F_i(W^{n+1}) = 0$$

*Stabilité sous condition CFL liée aux v.p de  $DF_e$*

## Etat de l'art

### Cas isentropique ( $p = p(\rho) = \rho^\gamma$ ) bien compris

#### AP schemes, order 1, order 2, Lagrangians, Eulerians, multi-D...

[Degond, Tang 11], [Grenier, Vila, Villedieu 13], [Noelle, Bispen, Arun, Lukacova, Munz,14], [Chalons, Girardin, Kokh,15], [Dimarco, Loubère, Vignal, 17], [Dimarco, Loubère, Michel-Dansac, Vignal,18], [Bruel, Delmas, Jung, Perrier, 18], [Boscarino, Russo, Scandurra, 18],...

#### Basés sur une décomposition du flux $F(W) = F_e(W) + F_i(W)$

- ➡ Séparation des ondes rapides (de pression), des ondes lentes (fluides)
- ➡ Traitement implicite de  $F_i$  et explicite de  $F_e$  (Schémas IMEX)

### Euler complet plus compliqué

[Cordier, Degond, Kumbaro,12], [Chalons, Girardin, Kokh, 13, 16], [Tavelli, Dumbser, 17], [Dimarco, Loubère, Vignal, 17], [Boscarino, Russo, Scandurra, 18], [Boscheri, Dimarco, Loubère, Tavelli, Vignal, 20]...

- ➡ Plusieurs choix de décompositions du flux  $F(W) = F_e(W) + F_i(W)$
- ➡ Séparation difficile des ondes rapides, des ondes lentes



## Comprendre les problèmes des schémas explicites

► Semi-discrétisation explicite

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n = 0, \quad (1_n)$$

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^n = 0, \quad (2_n)$$

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot ((E + p) u)^n = 0, \quad (3_n)$$

$$E^n = \frac{p^n}{\gamma - 1} + \varepsilon \frac{\rho^n |u^n|^2}{2} \quad (4_n)$$

► Formellement  $\varepsilon \rightarrow 0$  donne  $\nabla p^n = 0$  pour le calcul de  $W^{n+1}$

rien sur  $p^{n+1} \Rightarrow$  seulement une contrainte sur la donnée initiale,  
pas asymptotiquement consistant

## Comprendre les problèmes des schémas explicites

- Première correction de la semi-discrétisation explicite

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u)^n = 0, \quad (1_n)$$

$$\frac{(\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u)^n + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^{n+1} = 0, \quad (2_n)$$

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot ((E + p) u)^n = 0, \quad (3_n)$$

$$E^n = \frac{p^n}{\gamma - 1} + \varepsilon \frac{\rho^n |u^n|^2}{2} \quad (4_n)$$

- Peut-on récupérer  $\nabla \cdot u^{n+1} = 0$  à la limite ?

Il faut introduire de l'implicitation sur  $u$  dans le flux d'énergie

**Question :** Quels termes dans  $F_e(W^n)$  et  $F_i(W^{n+1})$  ?

## Critères de choix de la décomposition des flux

(H1) Matrices jacobiennes  $DF_e$  et  $DF_i$  : v.p réelles.

(H2) v.p de  $DF_e$  bornées uniformément quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(H3) Consistance asymptotique :

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \nabla_x p^{n+1} = \nabla_x E^{n+1} = 0, \quad \nabla_x \cdot u^{n+1} = 0.$$

(H4) Préservation des discontinuités de contact :

$$\begin{cases} Du^n(x) = 0, \\ \nabla p^n(x) = 0. \end{cases} \Rightarrow \exists W^{n+1} \text{ tel que } \begin{cases} Du^{n+1}(x) = 0, \\ \nabla p^{n+1}(x) = 0. \end{cases}$$

$$Du(x) = (\partial_{x_j} u_i(x))_{1 \leq i, j \leq d}.$$

(H5) Coût du schéma IMEX similaire au schéma exp. quand  $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ .

## Etude des splittings

**1<sup>er</sup> splitting** : [Cordier, Degond, Kumbaro, 12]

$$\lambda_e = \gamma u, \frac{(3-\gamma)u}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma-3)(\gamma-1)u^2}, \lambda_i = 0, \pm \sqrt{\frac{\gamma-1}{\varepsilon\rho}} (E+p)$$

Pb (H2)  $\rightarrow$  Perte hyperbolicité pour  $\gamma < 3 \rightarrow$  v.p de  $DF_e$  complexe

**2<sup>ième</sup> splitting** : [Dimarco, Loubère, Vignal, 17]  $\lambda_e = \gamma u, (3-\gamma)u, 0,$

$$\lambda_i = 0, \pm \sqrt{\frac{\gamma-1}{\varepsilon\rho}} (E+p)$$

Pb (H3)  $\rightarrow$  Consistance à la limite à  $\mathcal{O}(\Delta t)$  près  $\rightarrow \nabla \cdot u^{n+1} = \mathcal{O}(\Delta t).$

Pb (H4)  $\rightarrow$  Préservation des discontinuités de contact à  $\mathcal{O}(\Delta t)$  près.

**3<sup>ième</sup> splitting** : [Toro, Vazquez, 12], [Dumbser, Casulli, 16], [Boscheri, Dimarco,

$$\text{Loubère, Tavelli, Vignal, 20}] \lambda_e = u, u, u, \lambda_i = 0, u/2 \pm \sqrt{u^2/4 + \frac{\gamma p}{\varepsilon\rho}}$$

Pb (H5)  $\rightarrow$  Résolution d'un système non linéaire  $\Rightarrow$  Très coûteux

**4<sup>ième</sup> splitting** : [Chalons, Girardin, Kokh, 16]  $\lambda_e = 0, u, u, \lambda_i = 0, \pm \sqrt{(\gamma-1) \frac{p}{\varepsilon\rho}}$

Pb (H3)  $\rightarrow$  Pas de consistance quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si données mal préparées

## Splitting retenu [Toro,Vazquez,12]

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot q^n = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left( \frac{q^n \otimes q^n}{\rho^n} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^{n+1} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left( k_\varepsilon^n \frac{q^n}{\rho^n} \right) + \nabla \cdot \left( h^{n+1} \frac{q^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = 0, \quad (1c)$$

$$E^{n+1} = \frac{p^{n+1}}{\gamma - 1} + \varepsilon \frac{\rho^{n+1} |u^{n+1}|^2}{2}. \quad (1d)$$

où

$$\Rightarrow k_\varepsilon = \varepsilon \frac{\rho |u|^2}{2} \text{ est l'énergie cinétique}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \text{ est l'enthalpie spécifique.}$$

**Reformulation :**Eq. sur  $q$  (1b) et  $E$  (1c) couplées  $\Rightarrow$  eq. sur la pression

## Reformulation pour le régime bas Mach

Équation sur la pression préparée au régime bas Mach

$$E^{n+1} = \frac{\tilde{p}^{n+1}}{\gamma - 1} + k_\varepsilon^{n+1} = E^n - \Delta t \nabla \cdot \left( \varepsilon \frac{\rho^n |u^n|^2}{2} u^n \right) - \Delta t \nabla \cdot \left( \frac{h^{n+1}}{\rho^{n+1}} \left( q^n - \Delta t \nabla \cdot \left( \frac{q^n \otimes q^n}{\rho^n} \right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \tilde{p}^{n+1} \right) \right) \quad (2)$$

Existence sol., matrice inversible [Boscheri,Dimarco,Loubère,Tavelli,Vignal,20]

- ➡ Calcul de  $\rho^{n+1}$ , avec l'éq. de conservation de la masse explicite
- ➡ Calcul de  $\tilde{p}^{n+1}$  (prédiction de  $p^{n+1}$ ) et  $q^{n+1} = (\rho u)^{n+1}$ , avec (2) et l'éq. de  $q \Rightarrow$  algorithme de Picard  $\rightarrow$  **couteux**
- ➡ Calcul de  $E^{n+1}$ , avec l'éq. de conservation de l'énergie
- ➡ Calcul de  $p^{n+1}$ , avec l'éq. d'état

## Simplification : Eliminer le point fixe couteux

**Objectif :** ➔ éviter le point fixe en explicitant certains termes, on obtient une équation linéaire pour la prédiction  $\tilde{p}^{n+1}$

$$E^{n+1} = \frac{\tilde{p}^{n+1}}{\gamma - 1} + k_\varepsilon^{n+1} = E^n - \Delta t \nabla \cdot \left( \varepsilon \frac{\rho^n |u^n|^2}{2} \frac{q^n}{\rho^n} \right) - \Delta t \nabla \cdot \left( \frac{h^{n+1}}{\rho^{n+1}} \left( q^n - \Delta t \nabla \cdot \left( \frac{q^n \otimes q^n}{\rho^n} \right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \tilde{p}^{n+1} \right) \right) \quad (2)$$

**Comment approcher  $h^{n+1}$  et  $k_\varepsilon^{n+1}$  ?**

**Le plus simple :** Approx. par les valeurs au temps  $n$  ➔ ne marche pas

**Donc :** Approx. par les valeurs convectées ➔

$$h^{n+1,exp} = h(W^{n+1,exp}) \quad \text{et} \quad k_\varepsilon^{n+1,exp} = k_\varepsilon(W^{n+1,exp})$$

$$W^{n+1,exp} = W^n - \Delta t \nabla \cdot F_e(W^n).$$

## Discrétisation en espace

**Stabilité  $L^2$  et  $L^\infty$**  [Dimarco,Loubère,Vignal,17] sur une équation modèle

- ▶ Flux explicite  $F_e$  : solveur Ruzanov
- ▶ Flux implicite  $F_i$  :
  - solveur centré :  $L^2$  stable sous C.F.L liée aux v.p. de  $DF_e$
  - solveur Ruzanov :  $L^\infty$  stable sous C.F.L liée aux v.p. de  $DF_e$   
(upwinding avec v.p. de  $DF_i$ ).

**Stabilité  $L^2$  pour le linéarisé d'Euler complet par Fourier**

Pour des nbres de Mach entre  $]0, 25]$

- ▶ Schéma [Boscheri,Dimarco,Loubère,Tavelli,Vignal,20]  
Sous C.F.L  $|u| \Delta t \leq \Delta x$
- ▶ Notre schéma [PA, Vignal] Pour des  $\gamma$  entre  $]1, 10]$ 
  - Solveur centré, sous C.F.L  $\gamma |u| \Delta t \leq \Delta x$
  - Solveur Ruzanov, sous C.F.L  $|u| \Delta t \leq \Delta x$

+ Discretization de l'éq. reformulée pour  $\tilde{p}^{n+1} \rightarrow$  système à 3 points



# Résultats numériques

➡ Comparaison de notre schéma [PA, Vignal] et de celui de [Boscheri,Dimarco,Loubère,Tavelli,Vignal,20]

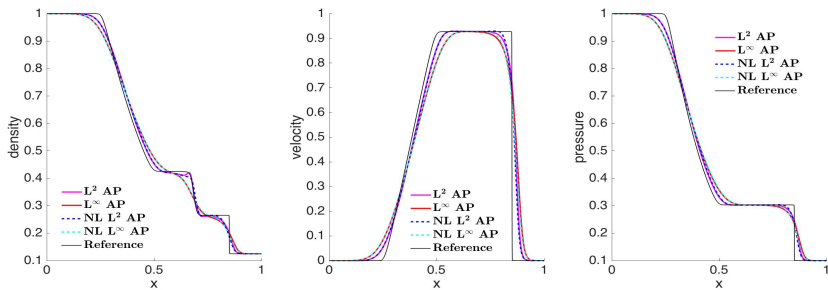
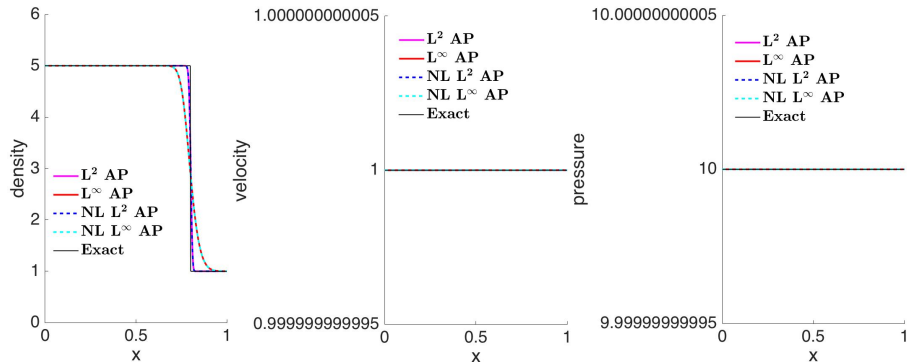


Figure: Problème de Sod : Mach variant entre 0 et 1 ,  $N_x = 200$ .

# Résultats numériques

## Discontinuité de contact



**Figure:** La solution exacte est donnée par :  $\rho(x, t) = \rho(x - t, 0)$ ,  $u(x, t) = u(x, 0)$  et  $p(x, t) = p(x, 0)$ ,  $N_x = 500$ .

# Résultats numériques

➡ Avantages de la version  $L^\infty$ ,

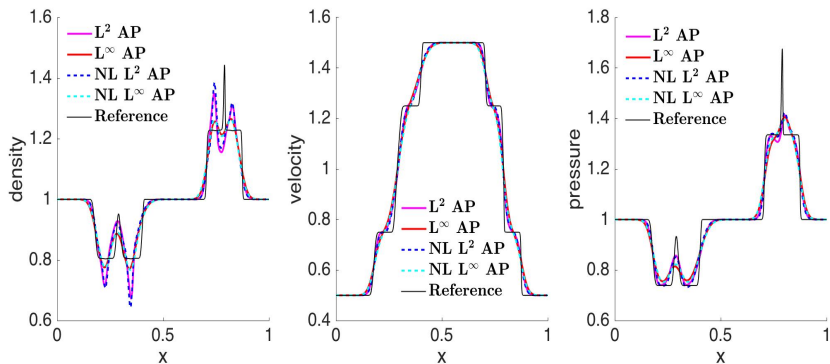


Figure:  $\varepsilon = 1$

Plusieurs problèmes de Riemann [Degond, Tang, 11],  $N_x = 200$ .

# Résultats numériques

► Avantages de la version  $L^\infty$ ,

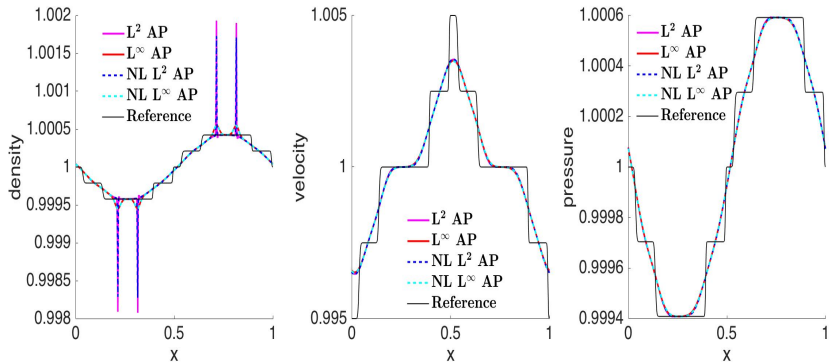


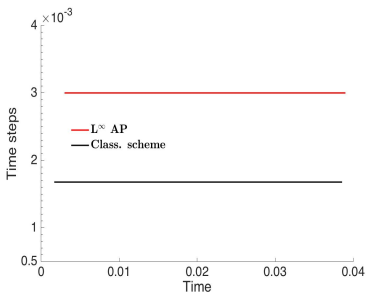
Figure:  $\varepsilon = 10^{-2}$

Plusieurs problèmes de Riemann [Degond, Tang, 11],  $N_x = 1000$ .

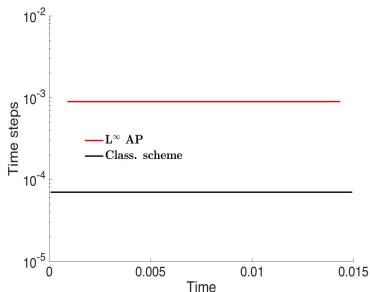
# Résultats numériques

## Stabilité asymptotique

Pas de temps  $1/\sqrt{\varepsilon}$  fois plus grands



$$\varepsilon = 1$$

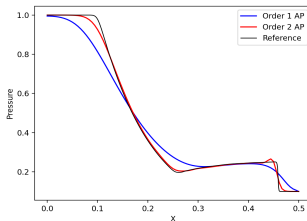
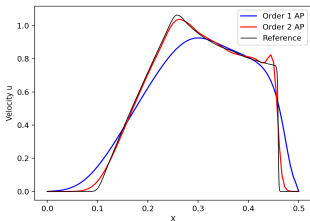
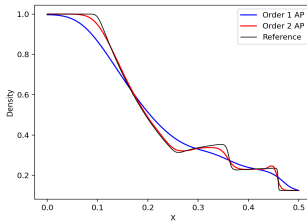
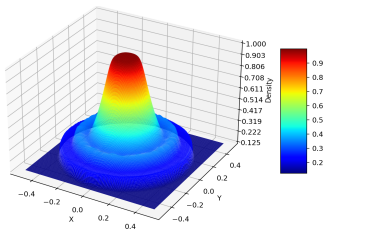


$$\varepsilon = 10^{-2}$$

Plusieurs problèmes de Riemann [Degond, Tang, 11]

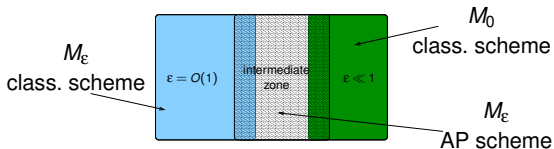
# Résultats numériques

► Cas test 2D : Tube à choc circulaire avec 180x180 mailles



# Conclusions et perspectives

- Extension aux équations de Navier-Stokes
- Décomposition de domaine par rapport à  $\varepsilon$



*Merci pour votre attention !*