Schémas volumes-finis d'ordre élevé positifs pour la diffusion sur maillage quelconque en 2D

Xavier BLANC, Laboratoire Jacques-Louis Lions - Université de Paris Cité
François HERMELINE, CEA-DAM Ile-de-France - Paris
Emmanuel LABOURASSE, CEA-DAM Ile-de-France - Paris
Julie PATELA, CEA-DAM Ile-de-France - Paris

Dans cet exposé, on s'intéresse à la résolution du problème

$$\begin{cases} \alpha u - \nabla \cdot \kappa \nabla u = f & \text{dans } \Omega, \\ \gamma \kappa \nabla \bar{u} \cdot \mathbf{n} + \delta \bar{u} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\kappa > 0, \alpha > 0, \gamma \geq 0, \delta \geq 0$ et γ et δ non nuls en même temps sur le bord.

Il est connu que cette équation admet une solution positive sous les conditions $f \geq 0, g \geq 0$ [3]. Les méthodes numériques préservant cette propriété au niveau discret sont dites monotones ou positives.

La positivité est fondamentale pour nos applications car u est par exemple une température ou une concentration. Nous avons proposé un schéma en 1D [1] qui permet de préserver la positivité tout en étant d'ordre élevé en espace. Dans cet exposé, j'explique comment étendre notre schéma 1D monotone d'ordre de précision quelconque en espace en 2D. Je propose une famille de schémas volumes finis d'ordre arbitraire. La consistance des flux est assurée par une reconstruction polynomiale.

Nous avons montré que ces schémas sont conservatifs et monotones, au prix de la linéarité du schéma. La non-linéarité est résolue grâce à un point fixe. Sous une hypothèse de stabilité, nous avons également montré la convergence à un ordre correspondant à un ordre de moins que le degré de la reconstruction. Ces schémas peuvent également être symmétrisés, ce qui induit en outre la structure LMP [2] (Linear Maximum Preserving) du schéma.

Cette souche de schémas est implantée en C++ dans une plateforme ouverte du CEA afin de pouvoir valider cette approche.

[1] X. Blanc, E. Labourasse, F. Hermeline, J. Patela. *High-order monotone finite-volume schemes for 1d elliptic problems.* HAL, 2021.

[2] J. Droniou, C. L. Potier. *Construction and convergence study of schemes prevserving the elliptic local maximum principle.* SIAM Journal on Numerical Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.

[3] L. Evans. *Application of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations.* Nonlinear Evolution Equations, pp. 163–188, 1978.

Contact : `julie_patela@hotmail.fr`