Plasticité parfaite : du calcul des variations aux systèmes hyperboliques

Jean-François Babadjian

Université Paris Saclay, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Travaux en collaboration avec V. Crismale, G. Francfort, A. Giacomini, R. Llerena, C. Mifsud, M. G. Mora, N. Seguin

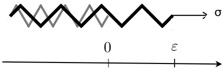
45ème Congrès National d'Analyse Numériques, Evian Les Bains

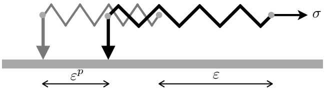
Plan de l'exposé

Elasticité

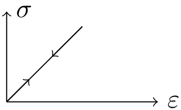
Plasticité parfaite

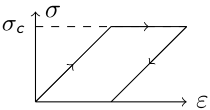
Modèles rhéologiques du ressort et du patin-ressort





Lois de comportement





Loi de comportement : $\sigma = A\varepsilon$

Seuil de forces : $|\sigma| \leq \sigma_c$

Déformation totale : $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$

Déformation élastique : $\sigma = A\varepsilon^e$

Déformation plastique : $\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_c, \\ \pm\dot{\varepsilon}^p \geq 0 & \text{si } \sigma = \pm\sigma_c. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \sigma\dot{\varepsilon}^p = \sigma_c|\dot{\varepsilon}^p|$

✓ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: configuration de référence d'un corps élasto-plastique.

✓ $w(t) : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$: donnée de Dirichlet (déplacement)

On définit

- $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^n$: champ des déplacements ;
- $\sigma : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{M}^{n\times n}_{sym}$: tenseur des contraintes ;
- $e : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{M}^{n\times n}_{sym}$: tenseur des déformations élastiques ;
- $p : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{M}^{n\times n}_{sym}$: tenseur des déformations plastiques.

On recherche un quadruplet (u, e, p, σ) tel que

$$\begin{cases} (\ddot{u}) - \mathrm{div}\sigma = 0 \text{ (équation du mouvement/d'équilibre);} \\ \sigma \in K \ (\subset \mathbb{M}^{n\times n}_{sym} \text{ convexe, fermé, non vide);} \\ (Du + Du^T)/2 =: Eu = e + p \text{ dans } \Omega \text{ (décomposition additive) ;} \\ \sigma = Ae \text{ (loi de Hooke);} \\ \dot{p} \in N_K(\sigma) = \partial I_K(\sigma) \text{ le cône normal à } K \text{ en } \sigma \text{ (loi d'écoulement);} \\ u = w(t) \text{ sur } \partial\Omega \text{ (condition limite);} \\ + \text{ conditions initiales.} \end{cases}$$

Loi d'écoulement $\Leftrightarrow$ principe de travail maximal de Hill :

$$\sigma \cdot \dot{p} = H(\dot{p}),$$

où $H(\dot{p}) = (I_K)^*(\dot{p}) := \sup_{\tau \in K} \tau \cdot \dot{p}$, H est la fonction d'appui de K.

Métaux et alliages : K ne dépend que des contraintes déviatoriques (cisaillement).

- Von Mises : $K = \{\tau \in \mathbb{M}^{n\times n}_{sym} : |\tau_D| \leq k\}$;
- Tresca : $K = \{\tau \in \mathbb{M}^{n\times n}_{sym} : \max_{i,j} |\tau_D^i - \tau_D^j| \leq k\}$, où τ_D^i sont les valeurs propres de τ_D.

Références :

- **Quasi-statique, problème en contrainte : Duvaut-Lions, Moreau (processus de raffle convexe) ;**
- **Quasi-statique, problème en déplacement : Suquet (détermination du bon cadre fonctionnel, approximation visco-plastiques) ;**
- **Statique, plasticité de Hencky : Temam, Anzelotti, Giaquinta, Kohn ;**
- **Quasi-statique : Dal Maso-De Simone-Mora (mouvement minimisants) ;**
- **Dynamique : Anzellotti-Luckhaus (approximation visco-élastique).**

Matériaux granulaires : la pression hydrostatique engendre des changements de volume permanents $(\mathrm{tr}\dot{p} \neq 0\,!)$

- Drucker-Prager : $K = \{\tau \in \mathbb{M}^{n\times n}_{sym} : |\tau_D| + \alpha\, \mathrm{tr}\tau \leq k\}$
- Mohr-Coulomb : $K = \{\tau \in \mathbb{M}^{n\times n}_{sym} : \max_{i,j} |\tau_D^i - \tau_D^j| + \alpha\, \mathrm{tr}\tau \leq k\}$

où $\alpha > 0$.

Plan de l'exposé

Modélisation

Du calcul des variations...

... aux systèmes hyperboliques

Energies

✓ Tenseur d'élasticité : $A \in \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n\times n}_{sym}, \mathbb{M}^{n\times n}_{sym})$ symétrique et $\alpha I \leq A \leq \beta I$;

✓ Convexe d'élasticité : $K \subset \mathbb{M}^{n\times n}_{sym}$ convexe, fermé, $0 \in \mathring{K}$, $c|q| \leq H(q)$;

Energie cinétique : $\mathcal{K}(v) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |v|^2 dx$ pour v $(= \dot{u}) \in L^2(\Omega)$;

Energie élastique : $\mathcal{Q}(e) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega Ae \cdot e\, dx$ pour $e \in L^2(\Omega)$;

Energie de dissipation :

$$\mathcal{H}(\dot{p}) := \int_\Omega H(\dot{p})\, dx \text{ pour } \dot{p} \in L^1(\Omega);$$

Espace d'énergie : pour $w \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w) \quad := \quad & \Big\{(u, e, p) \in [W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)] \times L^2(\Omega) \times L^1(\Omega) : \\ & Eu = e + p \text{ dans } \Omega,\ u = w \text{ sur } \partial\Omega\Big\}. \end{aligned}$$

Energies

✓ Tenseur d'élasticité : $A \in \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n\times n}_{sym}, \mathbb{M}^{n\times n}_{sym})$ symétrique et $\alpha I \leq A \leq \beta I$;
✓ Convexe d'élasticité : $K \subset \mathbb{M}^{n\times n}_{sym}$ convexe, fermé, $0 \in \mathring{K}$, $c|q| \leq H(q)$;

Energie cinétique : $\mathcal{K}(v) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |v|^2 dx$ pour $v\ (=\dot{u}) \in L^2(\Omega)$;
Energie élastique : $\mathcal{Q}(e) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega Ae \cdot e\, dx$ pour $e \in L^2(\Omega)$;

Energie de dissipation (Goffman-Serrin, Demengel-Temam) :

$$H(\dot{p}) := H\left(\frac{d\dot{p}}{d|\dot{p}|}\right)|\dot{p}| \text{ et } \mathcal{H}(\dot{p}) := H(\dot{p})(\overline{\Omega}) \text{ pour } \dot{p} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega});$$

Espace d'énergie : pour $w \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w) \quad := \quad & \big\{(u,e,p) \in [BD(\Omega) \cap L^2(\Omega)] \times L^2(\Omega) \times \mathcal{M}(\overline{\Omega}) : \\ & Eu = e + p \text{ in } \Omega,\ p = (w-u) \odot \nu \text{ on } \partial\Omega\big\}. \end{aligned}$$

Théorème (B.-Mora)

Supposons que $w \in H^2_t(H^1_x) \cap H^3_t(L^2_x)$, $(u_0, e_0, p_0) \in \mathcal{A}(w(0))$, $v_0 \in H^1_x$, $\sigma_0 := Ae_0 \in K$.
Alors, il existe un unique quadruplet (u, e, p, σ) *tel que*

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}_t(BD_x) \cap W^{2,\infty}_t(L^2_x), \\ e,\ \sigma \in W^{1,\infty}_t(L^2_x), \\ p \in W^{1,1}_t(\mathcal{M}_x), \end{cases}$$

- ✓ Condition Initiale : $(u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0)$ *et* $\dot u(0) = v_0$;
- ✓ Equations du mouvement : $\ddot u - \mathrm{div}\sigma = 0 \quad$ *dans* $\Omega \times (0, T)$;
- ✓ Admissibilité plastique : $\sigma \in K$ *dans* $\Omega \times (0, T)$;
- ✓ Compatibilité cinématique :

$$Eu = e + p \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad p = (w - u) \odot \nu \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T);$$

- ✓ Loi de comportement : $\sigma = Ae$ *dans* $\Omega \times (0, T)$;
- ✓ Bilan d'énergie : $\forall\ t \in [0, T]$,

$$\mathcal{Q}(e(t)) + \mathcal{K}(\dot u(t)) + \int_0^t \mathcal{H}(\dot p(s))\, ds = \mathcal{Q}(e_0) + \mathcal{K}(v_0) + \int_0^t \int_\Omega (\sigma \cdot E\dot w + \ddot u \cdot \dot w)\, dx\, ds.$$

Validité de la loi d'écoulement

✓ Principe de travail maximal (Kohn-Temam) : p.p. tout $t \in [0, T]$,

$$H(\dot{p}(t)) = [\sigma(t) \cdot \dot{p}(t)]_{L^2,\mathcal{M}} \text{ dans } \mathcal{M}(\overline{\Omega}).$$

✓ En statique et quasi-statique (B.-Giacomini-Mora) : $\sigma(t) \in H^1_{\mathrm{loc}}$ et le produit (ponctuel) de $\sigma(t)$ et $\dot{p}(t)$ est bien défini

✓ En dynamique (B.-Giacomini-Mora) : $\dot{u}(t)$, $\sigma(t) \in H^1_{\mathrm{loc}}$ et $\dot{p}(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}$ et on a bien

$$H(\dot{p}(t)) = \sigma(t) \cdot \dot{p}(t) \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

mais possible formation d'une couche limite sur le bord.

Plan de l'exposé

Modélisation

Du calcul des variations...

... aux systèmes hyperboliques

Systèmes de Friedrichs

Elasto-dynamique : $\ddot{u} - \operatorname{div}(A\,Eu) = 0$

Variable hyperbolique : $U := (\dot{u}, \sigma) = (\dot{u}, A\,Eu) \in \mathbb{R}^{d = n + \frac{n(n+1)}{2}}$

L'équation des ondes est équivalente à (Hugues-Marsden)

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_i U = 0.$$

ou encore, pour tout vecteur constant $\kappa \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction test $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_0^{\infty} \int_{\Omega} |U - \kappa|^2 \partial_t \varphi + \sum_{i=1}^{n} A_i (U - \kappa) \cdot (U - \kappa) \partial_i \varphi + \int_{\Omega} |U_0 - \kappa|^2 \varphi(0) = 0.$$

Systèmes de Friedrichs sous contrainte convexe

Plasticité : $\ddot{u} - \operatorname{div}\sigma = 0$, $E\dot{u} = \dot{e} + \dot{p}$ et $\sigma \in K$

Variable hyperbolique : $U := (\dot{u}, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times K \subsetneq \mathbb{R}^d$

Le système de la plasticité parfaite s'écrit

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_i U = \text{ un terme explicite qui dépend de } \dot{p},$$

ou encore, pour tout vecteur constant $\kappa = (k, \tau) \in \mathbb{R}^n \times K$ et toute fonction test $\varphi \geq 0$ with $\varphi = 0$ on $\partial\Omega$,

$$\int_0^\infty \int_\Omega |U - \kappa|^2 \partial_t \varphi + \sum_{i=1}^{n} A_i (U - \kappa) \cdot (U - \kappa) \partial_i \varphi + \int_\Omega |U_0 - \kappa|^2 \varphi(0) \geq 0.$$

✓ Analogie avec la formulation entropique des lois de conservation scalaire (Kruzkov) ; ici on s'attend à une théorie L^2 car on a des entropies quadratiques $U \mapsto |U - \kappa|^2$.

✓ Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ et des systèmes de Friedrichs généraux AVEC contraintes :

- $\exists!$ par Després-Lagoutière-Seguin : Méthode de volume fini ;
- $\exists$ par B.-Mifsud-Seguin : Approximation parabolique et pénalisation de la contrainte.

✓ Pour $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ et des systèmes de Friedrichs généraux SANS contrainte : formulation "entropique–dissipative" par Després-Mifsud-Seguin pour une classe de condition limite de Friedrichs

$$(A_\nu - M)U = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,$$

où $A_\nu = \sum_{i=1}^n A_i \nu_i$ (ν normale extérieure à $\partial\Omega$) et M est une matrice telle que

- $M^T = M$;
- $M \geq 0$;
- $\mathrm{Ker} A_\nu \subset \mathrm{Ker} M$;
- $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A_\nu - M) + \mathrm{Ker}(A_\nu + M)$.

✓ Dans notre cas

$$(A_\nu - M)U = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma\nu + S\dot{u} = 0, \quad S \in \mathbb{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym},+}.$$

Théorème (B.-Mifsud, B.-Crismale)

$\exists\,!\; u \in W^{2,\infty}_t(L^2_x) \cap \mathcal{C}^{0,1}_t(BD_x)$, $e \in W^{1,\infty}_t(L^2_x)$ *et* $p \in \mathcal{C}^{0,1}_t(\mathcal{M}_x)$ *tels que*

$$\begin{cases} \ddot{u} - \mathrm{div}\sigma = 0 \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\ \sigma \in K \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\ Eu = e + p \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\ [\sigma \cdot \dot{p}]_{L^2,\mathcal{M}} = H(\dot{p}) \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\ \sigma\nu + S\dot{u} = 0 \textit{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ +C.I. \end{cases}$$

Théorème (B.-Mifsud, B.-Crismale)

$\exists\,!\ u \in W^{2,\infty}_t(L^2_x) \cap \mathcal{C}^{0,1}_t(BD_x)$, $\sigma \in W^{1,\infty}_t(L^2_x)$ et $p \in \mathcal{C}^{0,1}_t(\mathcal{M}_x)$ tels que

$$
\begin{cases}
\ddot u - \mathrm{div}\sigma = 0 \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\
\sigma \in K \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\
Eu = e + p \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\
[\sigma \cdot \dot p]_{L^2,\mathcal{M}} = H(\dot p) \textit{ dans } \Omega \times (0,T), \\
\sigma\nu + \cancel{S\dot u}\, P_{-K\nu}(S\dot u) = 0 \textit{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\
+C.I.
\end{cases}
$$

Variationnel versus hyperbolique

✓ Si (u, e, p) est une "solution variationnelle" alors $U = (\dot{u}, \sigma) \in W^{1,\infty}(L^2)$ est une "solution entropique dissipative" : $\forall$ $\kappa \in \mathbb{R}^n \times K$ and $\forall\ \varphi \geq 0$,

$$\int_0^T \int_\Omega |U - \kappa|^2 \partial_t \varphi + \sum_{i=1}^n A_i(U - \kappa) \cdot (U - \kappa) \partial_i \varphi + \int_\Omega |U_0 - \kappa|^2 \varphi(0) + \int_0^T \int_{\partial\Omega} M\kappa^+ \cdot \kappa^+ \varphi \geq 0.$$

✓ Réciproquement, si $U = (v, \sigma) \in W^{1,\infty}(L^2)$ est une "solution entropique–dissipative", alors on peut construire u, e et p tels que $v = \dot{u}$, $\sigma = Ae$, $p = Eu - e$ et (u, e, p) est une "solution variationnelle".

✓ Formulation L^2 d'un problème hyperbolique aux limites par analogie avec la théorie L^∞ de Otto pour les lois de conservation scalaires en domaine borné.

✓ En faisant tendre $S \to 0$ ou $S \to \infty$, on retrouve les conditions de Dirichlet ou Neumann homogène (B-Llerena).

Merci !