Méthodes linéairement implicites pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

Ingrid LACROIX-VIOLET, Institut Elie Cartan de Lorraine - Nancy

Dans cet exposé, nous nous intéresserons à l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$\begin{cases} i\partial_t\varphi(t,\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\Delta + \beta|\varphi(t,\mathbf{x})|^{2\sigma}\right)\varphi(t,\mathbf{x}), \\ \varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{1}$$

où φ est une fonction d'onde à valeurs complexes, β la force de non linéarité, $\mathbf{x} = (x,y)^t$, $t > 0$, et $\sigma \in \mathbb{N}^\star$.
Cette équation possède plusieurs invariants dont la masse et l'énergie. En effet, on peut facilement montrer que

$$\int_\Omega |\varphi(t,\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_\Omega |\varphi_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \tag{2}$$

et $E(\varphi(t,\cdot)) = E(\varphi_0)$ où :

$$E(\varphi) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \frac{\beta}{2\sigma+2}\int_\Omega |\varphi|^{2\sigma+2} \tag{3}$$

Le but est de construire des méthodes numériques d'intégration en temps de (1) qui, idéalement, préserve la masse, l'énergie et soit d'ordre élevé.

En 2004, C. Besse a présenté dans le cas cubique ($\sigma = 1$) la méthode de relaxation [1]. Celle-ci est une méthode linéairement implicite d'ordre 2 permettant de préserver la masse et une énergie discrète consistante avec l'énergie (3). Le caractère linéairement implicite de la méthode permet de n'avoir à résoudre que des systèmes linéaires à chaque itération en temps.

Après l'avoir brièvement présentée, je présenterai deux « généralisations » de cette méthode conservant en particulier le caractère linéairement implicite de la méthode d'origine, caractère qui permet de réduire le coût numérique de la méthode. La première, issue d'un travail avec C. Besse, S. Descombes et G. Dujardin [2], permet d'étendre la méthode au cas d'exposants de non linéarité généraux tout en conservant l'ordre 2 et la préservation de la masse et d'une énergie discrète consistante avec l'énergie (3). La seconde, issue d'un travail en collaboration avec G. Dujardin [3, 4], peut en fait s'appliquer à toute une classe d'équations dont l'équation (1) fait partie. Elle permet d'obtenir des méthodes d'ordre aussi élevé que voulu tout en préservant la masse.

[1] C. Besse. *A relaxation scheme for the nonlinear Schrödinger equation.* SIAM J. Numer. Anal., **42(3)**, 2004.

[2] C. Besse, S. Descombes, G. Dujardin, I. Lacroix-Violet. *Energy preserving methods for nonlinear Schrödinger equations.* IMA Journal of Numerical Analysis, **41(1)**, 2021.

[3] G. Dujardin, I. Lacroix-Violet. *High order linearly implicit methods for evolution equations.* ESAIM : M2AN, **56(3)**, 2022.

[4] G. Dujardin, I. Lacroix-Violet. *High order linearly implicit methods for semilinear evolution pdes*, 2022.

Contact : `ingrid.lacroix@univ-lorraine.fr`