Volumes finis et solutions renormalisées pour un problème elliptique à donnée L^1 avec conditions de Neumann

Mirella AOUN, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem - Université de Rouen

Olivier GUIBÉ, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem - Université de Rouen

Dans cet exposé nous présenterons le principal résultat de [1]. Nous étudions la convergence d'un schéma volumes finis type "cell-centered" pour le problème de convection-diffusion à donné L^1 avec conditions de Neumann :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u) &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ (\lambda(u)\nabla u - \boldsymbol{v}u)\cdot\vec{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné (polygonal) de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $\boldsymbol{v} \in L^p(\Omega)^d$ avec $2 < p < +\infty$ si $d = 2$ et $p = d$ si $d \geq 3$, λ est une fonction continue tels que $0 < \mu \leq \lambda(r) \leq \lambda_\infty, \forall r \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1(\Omega)$ avec $\int_\Omega f \,\mathrm{d}x = 0$. Comme f est dans L^1 il est indispensable d'utiliser une notion de solution appropriée pour cette faible régularité (le cadre usuel étant le cadre variationnel). Nous utilisons pour (1) la notion de solution renormalisée (voir [5] et [4]), très largement développée dans le cas des conditions de Dirichlet. Les conditions de Neumann présentent en effet des difficultés supplémentaires, la solution n'étant pas nécessairement intégrable, sa moyenne n'est pas nécessairement définie. L'approche utilisée dans [2] consiste à remplacer la moyenne par la médiane.
En ce qui concerne volumes finis et données L^1, la convergence de la solution approchée par V-F vers la solution renormalisée a été montrée dans [7] avec conditions aux bords de Dirichlet. Pour les conditions aux bords de Neumann à donnée L^2, les auteurs dans [3] montrent la convergence vers la solution à moyenne nulle.
Dans [1] le résultat principal est la convergence de la solution approchée par la méthode des V-F vers l'unique solution renormalisée à mediane nulle de (1). L'originalité de ce résultat vient du fait que nous mélangeons les techniques des solutions renormalisées avec volumes finis, [6]. Nous passons à la limite dans une version discrète renormalisée.

[1] M. Aoun, O. Guibé. *Finite volume scheme and renormalized solutions for nonlinear elliptic neumann problem with L^1 data*, 2022. Preprint.

[2] M. F. Betta, O. Guibé, A. Mercaldo. *Neumann problems for nonlinear elliptic equations with L^1 data.* J. Differential Equations, **259(3)**, 2015.

[3] C. Chainais-Hillairet, J. Droniou. *Finite-volume schemes for noncoercive elliptic problems with Neumann boundary conditions.* IMA J. Numer. Anal., **31(1)**, 2011.

[4] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet. *Renormalization solutions of elliptic equations with general measure data.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser., **28(4)**, 741–808, 1999.

[5] R. J. DiPerna, P.-L. Lions. *On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability.* Annals of Mathematics. Second Series, **130(2)**, 1989.

[6] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin. *Finite volume methods.* In *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handb. Numer. Anal., VII, pp. 713–1020. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[7] S. Leclavier. *Finite volume scheme and renormalized solutions for a noncoercive elliptic problem with L^1 data.* Comput. Methods Appl. Math., **17(1)**, 2017.

Contact : `mirella.aoun@univ-rouen.fr`