Une méthode de reconstruction pour un problème inverse géométrique en gravimétrie

Anthony GERBER-ROTH, Université de Lorraine, CNRS, Inria, IECL - Nancy
Alexandre MUNNIER, Université de Lorraine, CNRS, Inria, IECL - Nancy
Karim RAMDANI, Université de Lorraine, CNRS, Inria, IECL - Nancy

Soit $\omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert inclus dans $B := B(0,1)$ et posons $\Gamma = \partial B$. On note U_ω l'unique solution de

$$-\Delta U_\omega = \mathbb{1}_\omega \quad \text{sur } \mathbb{R}^2,$$

où $U_\omega(x) = O(\ln|x|)$ à l'infini. La fonction U_ω peut être vue comme le champ gravitationnel généré par une distribution de masse uniforme dans ω et est donnée par le potentiel $U_\omega(x) = \int_\omega G(x-y)\,\mathrm{d}y$, où $G(x) := -1/2\pi \ln|x|$ est la solution fondamentale du laplacien. Le problème inverse qui nous intéresse consiste à reconstruire ω à partir de la connaissance de ∇U_ω sur Γ. Ce problème est connu pour être mal posé, l'unicité ne pouvant être garantie que dans certains cas, voir [3, Théorème 4.1.1].
D'après la formule de Green, on a l'égalité

$$\int_\Gamma \partial_n v\, U_\omega - \partial_n U_\omega\, v = \int_\omega v, \tag{1}$$

pour toute fonction v harmonique sur B. Étant donné que la connaissance de ∇U_ω sur Γ nous donne accès à U_ω sur Γ (on rappelle que U_ω est harmonique à l'extérieur de Γ), en choisissant $v = z^\ell$ dans (1) le problème inverse peut se reformuler sous forme d'un problème de moments : *Comment reconstruire ω à partir de ses moments harmoniques $\int_\omega z^\ell$?* Notre approche consiste à choisir $N \in \mathbb{N}$ et :

(i) calculer des poids $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$ et des noeuds $z_1, ..., z_N \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant 2N-1, \qquad \int_\omega z^\ell = \sum_{k=1}^{N} c_k z_k^\ell.$$

Cela peut être fait numériquement en utilisant la méthode de Prony (voir [1]).

(ii) construire un domaine ω_N qui satisfait ces identités pour tout $\ell \geqslant 0$ (un tel domaine existe et est appelé domaine de quadrature harmonique, voir [2, Section 6]). Cela peut-être fait en résolvant une inéquation variationnelle, ce qui peut être réalisé numériquement par éléments finis.

Dans ce cas nous avons :

$$\forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant 2N-1, \qquad \int_\omega z^\ell = \int_{\omega_N} z^\ell,$$

ce qui implique $\|\nabla(U_\omega - U_{\omega_N})\|_{L^2(\Gamma)} \to 0$ lorsque $N \to +\infty$. On dit que les ω_N sont gravi-équivalent à ω lorsque $N \to +\infty$, ce qui implique dans certains cas que $\omega_N \to \omega$. La méthode a été implémentée et se montre efficace sur de nombreux cas tests, parmi ces derniers certains seront présentés à l'oral.

[1] G. H. Golub, P. Milanfar, J. Varah. *A stable numerical method for inverting shape from moments.* SIAM J. Sci. Comput., **21(4)**, 1222–1243 (electronic), 1999.

[2] B. Gustafsson, H. S. Shapiro. *What is a quadrature domain ?* In *Quadrature domains and their applications*, vol. 156 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pp. 1–25. Birkhäuser, Basel, 2005.

[3] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, vol. 127. New York, NY : Springer, 2006.

Contact : `anthony.gerber-roth@univ-lorraine.fr`