RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

IRSN
INSTITUT DE RADIOPROTECTION ET DE SÛRETÉ NUCLÉAIRE

MÉTHODES ÉLÉMENTS FINIS AVEC DES INCONNUES AUX FACES POUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES SUR DES MAILLAGES TRIDIMENSIONNELS COMPLEXES

CANUM 2022

Aubin BRUNEL[1, 2]
Jean-Claude LATCHÉ [1]

[1] IRSN Cadarache, Laboratoire de l'Incendie et des Explosions,
[2] Aix-Marseille Université

13-17 juin 2022

MEMBRE DE
ETSON

Contexte et objectifs

Contexte

- Développement de $CALIF^3S$, logiciel de calcul pour la mécanique des fluides.

Contexte et objectifs

Contexte

- Développement de $CALIF^3S$, logiciel de calcul pour la mécanique des fluides.
- Schémas numériques à mailles décalées : inconnues scalaires associées aux centres des mailles, inconnues de vitesse associées aux faces des mailles (Crouzeix-Raviart, Rannacher-Turek).

Contexte et objectifs

Contexte

- Développement de $CALIF^3S$, logiciel de calcul pour la mécanique des fluides.
- Schémas numériques à mailles décalées : inconnues scalaires associées aux centres des mailles, inconnues de vitesse associées aux faces des mailles (Crouzeix-Raviart, Rannacher-Turek).
- Besoin en schémas numériques performants pour traider des domaines tridimensionnels complexes.

Contexte et objectifs

Contexte

- Développement de $CALIF^3S$, logiciel de calcul pour la mécanique des fluides.
- Schémas numériques à mailles décalées : inconnues scalaires associées aux centres des mailles, inconnues de vitesse associées aux faces des mailles (Crouzeix-Raviart, Rannacher-Turek).
- Besoin en schémas numériques performants pour traider des domaines tridimensionnels complexes.

Objectifs

- Étendre les schémas existants à des mailles particulières (mailles pyramidales, prismatiques, faces courbes).

Contexte et objectifs

Contexte

- Développement de $CALIF^3S$, logiciel de calcul pour la mécanique des fluides.
- Schémas numériques à mailles décalées : inconnues scalaires associées aux centres des mailles, inconnues de vitesse associées aux faces des mailles (Crouzeix-Raviart, Rannacher-Turek).
- Besoin en schémas numériques performants pour traider des domaines tridimensionnels complexes.

Objectifs

- Étendre les schémas existants à des mailles particulières (mailles pyramidales, prismatiques, faces courbes).
- Proposer une discrétisation du terme de diffusion $-\mu\boldsymbol{\Delta u}$ sur ces mailles, basée sur des méthodes EFs.

Contexte et objectifs

Contexte

- Développement de $CALIF^3S$, logiciel de calcul pour la mécanique des fluides.
- Schémas numériques à mailles décalées : inconnues scalaires associées aux centres des mailles, inconnues de vitesse associées aux faces des mailles (Crouzeix-Raviart, Rannacher-Turek).
- Besoin en schémas numériques performants pour traider des domaines tridimensionnels complexes.

Objectifs

- Étendre les schémas existants à des mailles particulières (mailles pyramidales, prismatiques, faces courbes).
- Proposer une discrétisation du terme de diffusion $-\mu\boldsymbol{\Delta u}$ sur ces mailles, basée sur des méthodes EFs.
- Étudier cette discrétisation dans le cas de l'équation de Poisson.

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Un problème elliptique classique : le problème de Poisson

Formulation faible : Avec $f \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R})$, on cherche $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Un problème elliptique classique : le problème de Poisson

Formulation faible : Avec $f \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R})$, on cherche $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Avec $\mathcal{M}$ un maillage de Ω, $\mathcal{M} = \cup_{K \in \mathcal{M}} K$, où K sont des polyhèdres, $\mathcal{E}$ l'ensemble des faces du maillage,

Un problème elliptique classique : le problème de Poisson

Formulation faible : Avec $f \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R})$, on cherche $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Avec $\mathcal{M}$ un maillage de Ω, $\mathcal{M} = \cup_{K \in \mathcal{M}} K$, où K sont des polyhèdres, $\mathcal{E}$ l'ensemble des faces du maillage, on définit :

$$X_{\mathcal{M},0} := \Big\{ u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}), \text{ avec } u_{|K} \in P(K), \ \forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u_{|K} = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u_{|L} \ \forall \sigma \in \mathcal{E}, \sigma = K|L, \\ \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u = 0 \ \forall \sigma \in \partial(\Omega) \Big\} .$$

Un problème elliptique classique : le problème de Poisson

Formulation faible : Avec $f \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R})$, on cherche $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Avec $\mathcal{M}$ un maillage de Ω, $\mathcal{M} = \cup_{K \in \mathcal{M}} K$, où K sont des polyhèdres, $\mathcal{E}$ l'ensemble des faces du maillage, on définit :

$$X_{\mathcal{M},0} := \Big\{ u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}), \text{ avec } u_{|K} \in P(K), \ \forall K \in \mathcal{M}, \quad \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u_{|K} = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u_{|L} \ \forall \sigma \in \mathcal{E}, \sigma = K|L, \\ \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u = 0 \ \forall \sigma \in \partial(\Omega) \Big\} .$$

Problème discret : Avec $f \in H^{-1}(\Omega, \mathbb{R})$, on cherche $u_\mathcal{M} \in X_{\mathcal{M},0}$

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla u_\mathcal{M} \cdot \nabla v_\mathcal{M} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v_\mathcal{M} \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v_\mathcal{M} \in X_{\mathcal{M},0}.$$

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Construction locale des espaces discrets

Pour construire une base de $X_{\mathcal{M},0}$, on procède maille par maille.

Construction locale des espaces discrets

Pour construire une base de $X_{\mathcal{M},0}$, on procède maille par maille.

Deux méthodes possibles :

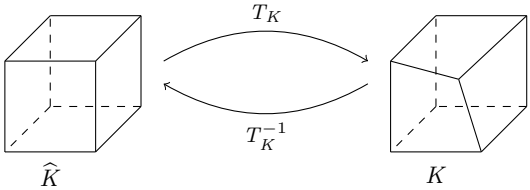
- EF paramétriques : coût informatique faible, mauvaise approximation sur maillages "déformés" ;

Construction locale des espaces discrets

Pour construire une base de $X_{\mathcal{M},0}$, on procède maille par maille.

Deux méthodes possibles :

- EF paramétriques : coût informatique faible, mauvaise approximation sur maillages "déformés" ;



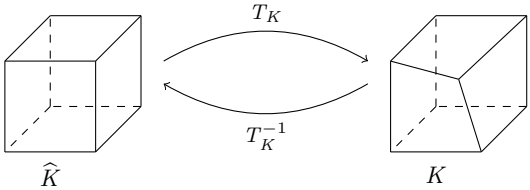
Construction locale des espaces discrets

Pour construire une base de $X_{\mathcal{M},0}$, on procède maille par maille.

Deux méthodes possibles :

- EF paramétriques : coût informatique faible, mauvaise approximation sur maillages "déformés" ;

$\widehat{\Phi}_j$
Polynomiale



$\Phi_j = \widehat{\Phi_j} \circ T_K^{-1}$
Non polynomiale

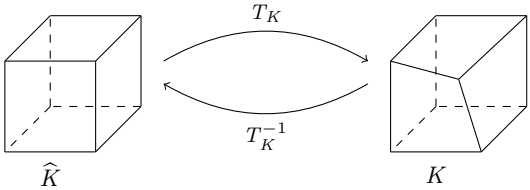
Construction locale des espaces discrets

Pour construire une base de $X_{\mathcal{M},0}$, on procède maille par maille.

Deux méthodes possibles :

- EF paramétriques : coût informatique faible, mauvaise approximation sur maillages "déformés" ;

$\widehat{\Phi}_j$
Polynomiale



$\Phi_j = \widehat{\Phi_j} \circ T_K^{-1}$
Non polynomiale

- EF non-paramétriques : coût informatique plus important, approximation optimale sur maillages "déformés".

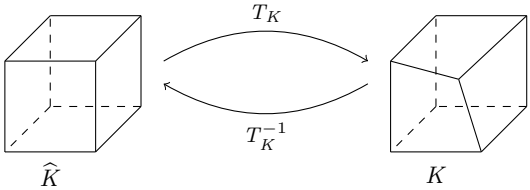
Construction locale des espaces discrets

Pour construire une base de $X_{\mathcal{M},0}$, on procède maille par maille.

Deux méthodes possibles :

- EF paramétriques : coût informatique faible, mauvaise approximation sur maillages "déformés" ;

$\widehat{\Phi}_j$
Polynomiale



$\Phi_j = \widehat{\Phi_j} \circ T_K^{-1}$
Non polynomiale

- EF non-paramétriques : coût informatique plus important, approximation optimale sur maillages "déformés".

Application à des géométries complexes $\Longrightarrow$ version **non-paramétrique**.

Éléments finis paramétriques et non paramétriques

Pour construire localement une base polynomiale, on considère :

- $K \in \mathcal{M}$ une maille ;
- $P(K)$ polynômes définis sur K ;
- $\Gamma(K)$ formes nodales qui dépendent de K;

Éléments finis paramétriques et non paramétriques

Pour construire localement une base polynomiale, on considère :

- $K \in \mathcal{M}$ une maille ;
- $P(K)$ polynômes définis sur K ;
- $\Gamma(K)$ formes nodales qui dépendent de K;

$\left.\right\}$ $(\Phi_j)_j \subset P(K)$ tels que $\gamma_i(\Phi_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $\gamma_i \in \Gamma(K)$

Éléments finis paramétriques et non paramétriques

Pour construire localement une base polynomiale, on considère :

- $K \in \mathcal{M}$ une maille ;
- $P(K)$ polynômes définis sur K ;
- $\Gamma(K)$ formes nodales qui dépendent de K;

$\Bigg\}$ $(\Phi_j)_j \subset P(K)$ tels que $\gamma_i(\Phi_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $\gamma_i \in \Gamma(K)$

Pour $X_{\mathcal{M},0}$, on prend :

- $\Gamma(K) = (\gamma_{\sigma_i})_i$, avec γ_{σ_i} moyenne sur la face σ_i de K ;

Éléments finis paramétriques et non paramétriques

Pour construire localement une base polynomiale, on considère :

- $K \in \mathcal{M}$ une maille ;
- $P(K)$ polynômes définis sur K ;
- $\Gamma(K)$ formes nodales qui dépendent de K;

$\Bigg\}$ $(\Phi_j)_j \subset P(K)$ tels que $\gamma_i(\Phi_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $\gamma_i \in \Gamma(K)$

Pour $X_{\mathcal{M},0}$, on prend :

- $\Gamma(K) = (\gamma_{\sigma_i})_i$, avec γ_{σ_i} moyenne sur la face σ_i de K ;
- $P(K)$ tel que :
  - $(\gamma_{\sigma_i})_i$ indépendantes sur $P(K)$ (en particulier, $\#P(K) = \#\Gamma(K)$ $(= \#\mathcal{E}(K))$;
  - $P_1(K) \subset P(K) \subset P_2(K)$.

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Méthodes de la littérature

- Triangles/tétraèdres : Crouzeix-Raviart [1] ;
- Quadrilatères : Rannacher-Turek [2], Douglas-Santos-Sheen-Ye [3], Meng-Cui-Luo [4] ;
- Hexaèdres : Rannacher-Turek [2], Douglas-Santos-Sheen-Ye [3] ;
- Pyramides : Meng-Wang [5].

[1] M. Crouzeix, P-A Raviart, "Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations", 1973

[2] R. Rannacher et S. Turek, "Simple nonconforming quadrilateral Stokes element", 1992

[3] J. Douglas, JE. Santos, D. Sheen, X. Ye, "Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems", 1999

[4] Z. Meng, J. Cui et Z. Luo, "A new rotated nonconforming quadrilateral element", 2018

[5] Z. Meng, et R. Wang, "A new rotated nonconforming pyramid element", 2019

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Analyse a priori du schéma

Théorème (Analyse de l'erreur a priori)

Soit $u \in H_0^2(\Omega, \mathbb{R})$ la solution du problème faible, et $u_{\mathcal{M}} \in X_{\mathcal{M},0}$ la solution du problème discret. Si toutes les faces $\sigma \in \mathcal{E}$ sont planes, on a, en notant h le pas de maillage :

$$|u - u_{\mathcal{M}}|_{1,\mathcal{M}} \leq Ch\,|u|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{1}$$

$$\|u - u_{\mathcal{M}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\,|u|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{2}$$

où la constante C ne dépend que de la régularité du maillage.

avec $|v|_{1,\mathcal{M}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{M}} |v|_{H^1(K)}^2$.

Analyse a priori du schéma

Théorème (Analyse de l'erreur a priori)

Soit $u \in H_0^2(\Omega, \mathbb{R})$ la solution du problème faible, et $u_{\mathcal{M}} \in X_{\mathcal{M},0}$ la solution du problème discret. Si toutes les faces $\sigma \in \mathcal{E}$ sont planes, on a, en notant h le pas de maillage :

$$|u - u_{\mathcal{M}}|_{1,\mathcal{M}} \leq Ch\,|u|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{1}$$

$$\|u - u_{\mathcal{M}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\,|u|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{2}$$

où la constante C ne dépend que de la régularité du maillage.

avec $|v|_{1,\mathcal{M}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{M}} |v|_{H^1(K)}^2$.

Remarque :
Avec des éléments paramétriques, on obtiendrait :

$$|u - u_{\mathcal{M}}|_{1,\mathcal{M}} \leq C'(h+\alpha)\,|u|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{3}$$

$$\|u - u_{\mathcal{M}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C'h(h+\alpha)\,|u|_{H^2(\Omega)}\,, \tag{4}$$

avec α qui dépend de la régularité du maillage .

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Erreur d'interpolation

Pour les éléments paramétriques : Lemme de Bramble-Hilbert en utilisant T_K pour revenir à $\widehat{K}$.

Erreur d'interpolation

Pour les éléments paramétriques : Lemme de Bramble-Hilbert en utilisant T_K pour revenir à $\widehat{K}$.

Inapplicable pour les éléments non-paramétriques : T_K pas toujours polynomiale, parfois pas d'estimation sur $\|T_K\|$ ou $\left\|T_K^{-1}\right\|$.

Erreur d'interpolation

Pour les éléments paramétriques : Lemme de Bramble-Hilbert en utilisant T_K pour revenir à $\widehat{K}$.

Inapplicable pour les éléments non-paramétriques : T_K pas toujours polynomiale, parfois pas d'estimation sur $\| T_K \|$ ou $\left\| T_K^{-1} \right\|$.

Lemme de Bramble-Hilbert sur l'élément réel et argument de scaling : problème d'estimation de C pour des formes générales.

Un quasi-interpolateur de Clément [4]

Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$, on définit $B_\sigma := B(\boldsymbol{x}_\sigma, 2h)$ et on construit $p_\sigma(u) \in P_1(\Omega)$ tel que

$$\int_{B_\sigma} p_\sigma(u) = \int_{B_\sigma} u, \qquad \int_{B_\sigma} \partial_i p_\sigma(u) = \int_{B_\sigma} \partial_i u \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

[5] P. Clément, "Approximation by finite element functions using local regularization", 1975

[6] R. Verfürth, "A note on polynomial approximation in Sobolev spaces", 1999

Un quasi-interpolateur de Clément [4]

Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$, on définit $B_\sigma := B(\mathbf{x}_\sigma, 2h)$ et on construit $p_\sigma(u) \in P_1(\Omega)$ tel que

$$\int_{B_\sigma} p_\sigma(u) = \int_{B_\sigma} u, \qquad \int_{B_\sigma} \partial_i p_\sigma(u) = \int_{B_\sigma} \partial_i u \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

On a les estimations suivantes [6] :

$$\|u - p_\sigma(u)\|_{L^2(B_\sigma)} \leq C_0 h^2 \, |u|_{H^2(B_\sigma)} \,, \tag{5}$$

$$|u - p_\sigma(u)|_{H^1(B_\sigma)} \leq C_1 h \, |u|_{H^2(B_\sigma)} \,, \tag{6}$$

[5] P. Clément, "Approximation by finite element functions using local regularization", 1975

[6] R. Verfürth, "A note on polynomial approximation in Sobolev spaces", 1999

Un quasi-interpolateur de Clément [4]

Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$, on définit $B_\sigma := B(\boldsymbol{x}_\sigma, 2h)$ et on construit $p_\sigma(u) \in P_1(\Omega)$ tel que

$$\int_{B_\sigma} p_\sigma(u) = \int_{B_\sigma} u, \qquad \int_{B_\sigma} \partial_i p_\sigma(u) = \int_{B_\sigma} \partial_i u \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

On a les estimations suivantes [6] :

$$\|u - p_\sigma(u)\|_{L^2(B_\sigma)} \leq C_0 h^2 \, |u|_{H^2(B_\sigma)} \,, \tag{5}$$

$$|u - p_\sigma(u)|_{H^1(B_\sigma)} \leq C_1 h \, |u|_{H^2(B_\sigma)} \,, \tag{6}$$

Le projecteur est donné par :

$$\Pi : \left| \begin{array}{rcl} H^1(\Omega, \mathbb{R}) & \to & X_{\mathcal{M}} \\ u & \mapsto & \Pi u := \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \gamma_\sigma(p_\sigma(u)) \Phi_\sigma. \end{array} \right. .$$

[5] P. Clément, "Approximation by finite element functions using local regularization", 1975

[6] R. Verfürth, "A note on polynomial approximation in Sobolev spaces", 1999

Régularité du maillage

On suppose qu'il existe C_{H1}, C_{H2}, C_{H3} and C_{H4} telles que :

(H1) $\forall K \in \mathcal{M}, \forall \sigma \in \mathcal{E}(K), \|\phi_\sigma\|_{L^\infty(K)} \leq C_{H1}$;
$\implies \|\Phi_\sigma\|_{L^2(K)} \leq C_{H1} h_K^{d/2}$ et $|\Phi_\sigma|_{H^1(K)} \leq C_{H1} h_K^{d/2-1}$

$\mathcal{E}(K)$: ensemble des faces de K.

$h_K = \mathrm{diam}(K)$.

Régularité du maillage

On suppose qu'il existe C_{H1}, C_{H2}, C_{H3} and C_{H4} telles que :

(H1) $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}(K)$, $\|\phi_\sigma\|_{L^\infty(K)} \leq C_{H1}$;

(H2) $\forall K \in \mathcal{M}$, $card(\mathcal{E}(K)) \leq C_{H2}$;

$\mathcal{E}(K)$: ensemble des faces de K.

Régularité du maillage

On suppose qu'il existe C_{H1}, C_{H2}, C_{H3} and C_{H4} telles que :

(H1) $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}(K)$, $\|\phi_\sigma\|_{L^\infty(K)} \leq C_{H1}$;

(H2) $\forall K \in \mathcal{M}$, $card(\mathcal{E}(K)) \leq C_{H2}$;

(H3) $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}(K), h_K \leq C_{H4} h_\sigma$ and $h_K^{d-1} \leq C_{H3}|\sigma|$;

$h_K = \mathrm{diam}(K)$.

$h_\sigma = \mathrm{diam}(\sigma)$.

$|\sigma|$: mesure $d-1$ dimensionnel de σ.

Régularité du maillage

On suppose qu'il existe C_{H1}, C_{H2}, C_{H3} and C_{H4} telles que :

(H1) $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}(K)$, $\|\phi_\sigma\|_{L^\infty(K)} \leq C_{H1}$;

(H2) $\forall K \in \mathcal{M}$, $card(\mathcal{E}(K)) \leq C_{H2}$;

(H3) $\forall K \in \mathcal{M}$, $\forall \sigma \in \mathcal{E}(K), h_K \leq C_{H4} h_\sigma$ and $h_K^{d-1} \leq C_{H3}|\sigma|$;

(H4) $\forall (K, L) \in \mathcal{M}^2$ telles que $\overline{K} \cap \overline{L} \neq \emptyset, h_K \leq C_{H4} h_L$.

$h_K = \mathrm{diam}(K)$.

$h_L = \mathrm{diam}(L)$.

Résultat principal

Sous ces hypothèses, on a :

Théorème (Erreur d'interpolation locale)

Pour $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$, pour $K \in \mathcal{M}$ on a:

$$\left\| u - \Pi u_{|K} \right\|_{L^2(K)} + h \left| u - \Pi u_{|K} \right|_{H^1(K)} \leq C_{int} h^2 \left| u \right|_{H^2(\widetilde{K})},$$

où C_{int} ne dépend que de la régularité du maillage.

Résultat principal

Sous ces hypothèses, on a :

Théorème (Erreur d'interpolation locale)

Pour $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$, pour $K \in \mathcal{M}$ on a:

$$\left\| u - \Pi u_{|K} \right\|_{L^2(K)} + h \left| u - \Pi u_{|K} \right|_{H^1(K)} \leq C_{int} h^2 \left| u \right|_{H^2(\widetilde{K})},$$

où C_{int} ne dépend que de la régularité du maillage.

avec $\widetilde{K} := \{L \in \mathcal{M}, d(K, L) \leq h\}$.

Résultat principal

Sous ces hypothèses, on a :

Théorème (Erreur d'interpolation locale)

Pour $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$, pour $K \in \mathcal{M}$ on a:

$$\left\| u - \Pi u_{|K} \right\|_{L^2(K)} + h \left| u - \Pi u_{|K} \right|_{H^1(K)} \leq C_{int} h^2 \left| u \right|_{H^2(\widetilde{K})},$$

où C_{int} ne dépend que de la régularité du maillage.

avec $\widetilde{K} := \{L \in \mathcal{M}, d(K, L) \leq h\}$.

Preuve :
Preuve classique de P. Clément, en utilisant le projecteur défini auparavant. En utilisant les hypothèses de régularités, on obtient :

$$C_{int} = \max\{C_0, C_1\}[1 + 2 C_{H1} C_{H2} C_{H3} C_{H4} C_p].$$

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Lemme préliminaire

On a besoin d'un résultat préliminaire, qui suppose l'existence de C_{H6} et C_{H7} telles que:

(H5-H6) $\forall K \in \mathcal{M}, \forall \sigma \in \mathcal{E}(K), \exists \boldsymbol{x}_c \in K$, tel que $C_{\sigma,c} := \{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_c, \boldsymbol{x} \in \sigma, t \in [1/2, 1]\} \subset K$ et $\forall \boldsymbol{x} \in \sigma, C_{H5} \leq \dfrac{\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}|} \cdot \boldsymbol{n}_\sigma(\boldsymbol{x})$ et $\inf_{\boldsymbol{x} \in \sigma} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c| \geq C_{H6} h_K$.

Lemme préliminaire

On a besoin d'un résultat préliminaire, qui suppose l'existence de C_{H6} et C_{H7} telles que:

(H5-H6) $\forall K \in \mathcal{M}, \forall \sigma \in \mathcal{E}(K), \exists \boldsymbol{x}_c \in K$, tel que $C_{\sigma,c} := \{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{x}_c, \boldsymbol{x} \in \sigma, t \in [1/2, 1]\} \subset K$ et $\forall \boldsymbol{x} \in \sigma$, $C_{H5} \leq \dfrac{\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{x}|} \cdot \boldsymbol{n}_\sigma(\boldsymbol{x})$ et $\inf_{\boldsymbol{x}\in\sigma} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c| \geq C_{H6} h_K$.

On peut montrer:

Lemme (de trace)

Soit $K \in \mathcal{M}$, $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ et $\boldsymbol{x}_c$, C_{H5} et C_{H6} comme précédemment. Pour tout $f \in H^1(C_{\sigma,c})$, on a :

$$\|f\|^2_{L^2(\sigma)} \leq \frac{10 C_{H_6}}{C_{H_5}} h_K^{-1} \left(\|f\|^2_{L^2(K)} + h_K^2 |f|^2_{H^1(K)} \right). \tag{7}$$

Erreur de consistance pour des faces planes

Sous les hypothèses de régularité du maillage précédentes, on montre :

Théorème (Erreur de consistance)

Soit $u \in X_{\mathcal{M},0}$ and $\boldsymbol{v} \in H_0^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si toutes les faces $\sigma \in \mathcal{E}$ sont planes, on a :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_\sigma u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\gamma(\mathbf{x}) \leq C_{side} h \left| v \right|_{H^2(\Omega)} \left| u \right|_{1,\mathcal{M}}, \tag{8}$$

où C_{side} est une constante qui ne dépend que de la régularité du maillage.

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Le cas des faces non-planes

Le lemme sur l'erreur de consistance est faux car $\int_\sigma u_{|K}\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \neq \int_\sigma u_{|L}\boldsymbol{n}_{L,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$.

[7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", 2022

Le cas des faces non-planes

Le lemme sur l'erreur de consistance est faux car $\int_\sigma u_{|K}\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \neq \int_\sigma u_{|L}\boldsymbol{n}_{L,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$.

En s'inspirant de la méthodologie DG [7], on remplace la forme bilinéaire
$(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

[7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", 2022

Le cas des faces non-planes

Le lemme sur l'erreur de consistance est faux car $\int_\sigma u_{|K}\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \neq \int_\sigma u_{|L}\boldsymbol{n}_{L,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$.

En s'inspirant de la méthodologie DG [7], on remplace la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ par :

$$(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \int_\sigma [v]_\sigma \{\nabla u\}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$$

où $[f]_\sigma$ et $\{f\}_\sigma$ désignent respectivement le saut et la moyenne de f sur σ,

[7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", 2022

Le cas des faces non-planes

Le lemme sur l'erreur de consistance est faux car $\int_\sigma u_{|K}\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \neq \int_\sigma u_{|L}\boldsymbol{n}_{L,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$.

En s'inspirant de la méthodologie DG [7], on remplace la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ par :

$$(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \int_\sigma [v]_\sigma \{\nabla u\}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$$
$$- \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \int_\sigma [u]_\sigma \{\nabla v\}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$$

où $[f]_\sigma$ et $\{f\}_\sigma$ désignent respectivement le saut et la moyenne de f sur σ,

[7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", 2022

Le cas des faces non-planes

Le lemme sur l'erreur de consistance est faux car $\int_\sigma u_{|K}\boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) \neq \int_\sigma u_{|L}\boldsymbol{n}_{L,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$.

En s'inspirant de la méthodologie DG [7], on remplace la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ par :

$$(u,v) \mapsto \sum_{K\in\mathcal{M}} \int_K \nabla u : \nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \int_\sigma [v]_\sigma \{\nabla u\}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x})$$
$$- \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \int_\sigma [u]_\sigma \{\nabla v\}_\sigma \cdot \boldsymbol{n}_{K,\sigma}\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{\gamma_\sigma}{h_\sigma} \int_\sigma [u]_\sigma [v]_\sigma \mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x}).$$

où $[f]_\sigma$ et $\{f\}_\sigma$ désignent respectivement le saut et la moyenne de f sur σ, $\gamma_\sigma > 0$ est un paramètre utilisateur.

[7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified analysis of Discontinuous Galerkin methods for elliptic problems", 2022

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Méthodologie dans le cas général

Sur chaque maille K :

- Sur $\widehat{K}$, on définit les polynômes $(\widehat{p}_i)_{0 \leq i \leq d}$ de degré un ou moins ;

Méthodologie dans le cas général

Sur chaque maille K :

- Sur $\widehat{K}$, on définit les polynômes $(\widehat{p}_i)_{0 \leq i \leq d}$ de degré un ou moins ;
- On construit des polynômes $\widehat{p}_i \in P_2(\widehat{K})$ pour $d+1 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)$ tels que $\widehat{P}(\widehat{K}) =: \{\widehat{p}_i, 0 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)\}$ soit unisolvent pour $\widehat{\Gamma}(\widehat{K})$;

Méthodologie dans le cas général

Sur chaque maille K :

- Sur $\widehat{K}$, on définit les polynômes $(\widehat{p}_i)_{0 \leq i \leq d}$ de degré un ou moins ;
- On construit des polynômes $\widehat{p}_i \in P_2(\widehat{K})$ pour $d+1 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)$ tels que $\widehat{P}(\widehat{K}) =: \{\widehat{p}_i, 0 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)\}$ soit unisolvent pour $\widehat{\Gamma}(\widehat{K})$;
- On définit $T_{\widetilde{K}} : \widehat{K} \to \widetilde{K}$ affine et inversible tel que $\widetilde{K}$ soit une "approximation affine" de K ;

Méthodologie dans le cas général

Sur chaque maille K :

- Sur $\widehat{K}$, on définit les polynômes $(\widehat{p}_i)_{0\leq i\leq d}$ de degré un ou moins ;
- On construit des polynômes $\widehat{p}_i \in P_2(\widehat{K})$ pour $d+1 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)$ tels que $\widehat{P}(\widehat{K}) =: \{\widehat{p}_i, 0 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)\}$ soit unisolvent pour $\widehat{\Gamma}(\widehat{K})$;
- On définit $T_{\widetilde{K}} : \widehat{K} \to \widetilde{K}$ affine et inversible tel que $\widetilde{K}$ soit une "approximation affine" de K ;
- On construit $P(K) := \{p_i, 0 \leq i \leq card(\mathcal{E}(K))\}$ avec $p_i = \widehat{p}_i \circ T_{\widetilde{K}}^{-1}$.

Méthodologie dans le cas général

Sur chaque maille K :

- Sur $\widehat{K}$, on définit les polynômes $(\widehat{p}_i)_{0 \leq i \leq d}$ de degré un ou moins ;
- On construit des polynômes $\widehat{p}_i \in P_2(\widehat{K})$ pour $d+1 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)$ tels que $\widehat{P}(\widehat{K}) =: \{\widehat{p}_i, 0 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)\}$ soit unisolvent pour $\widehat{\Gamma}(\widehat{K})$;
- On définit $T_{\widetilde{K}} : \widehat{K} \to \widetilde{K}$ affine et inversible tel que $\widetilde{K}$ soit une "approximation affine" de K ;
- On construit $P(K) := \{p_i, 0 \leq i \leq card(\mathcal{E}(K))\}$ avec $p_i = \widehat{p}_i \circ T_{\widetilde{K}}^{-1}$.

Contrairement aux éléments paramétriques, on utilise une transformation approchée pour définir $P(K)$ plutôt que les fonctions de formes.

Méthodologie dans le cas général

Sur chaque maille K :

- Sur $\widehat{K}$, on définit les polynômes $(\widehat{p}_i)_{0\leq i\leq d}$ de degré un ou moins ;
- On construit des polynômes $\widehat{p}_i \in P_2(\widehat{K})$ pour $d+1 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)$ tels que $\widehat{P}(\widehat{K}) =: \{\widehat{p}_i, 0 \leq i \leq \#\mathcal{E}(K)\}$ soit unisolvent pour $\widehat{\Gamma}(\widehat{K})$;
- On définit $T_{\widetilde{K}} : \widehat{K} \to \widetilde{K}$ affine et inversible tel que $\widetilde{K}$ soit une "approximation affine" de K ;
- On construit $P(K) := \{p_i, 0 \leq i \leq card(\mathcal{E}(K))\}$ avec $p_i = \widehat{p}_i \circ T_{\widetilde{K}}^{-1}$.

Contrairement aux éléments paramétriques, on utilise une transformation approchée pour définir $P(K)$ plutôt que les fonctions de formes.

Par ailleurs, on a $P_1(K) \subset P(K)$.

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

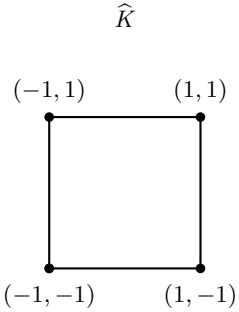
Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

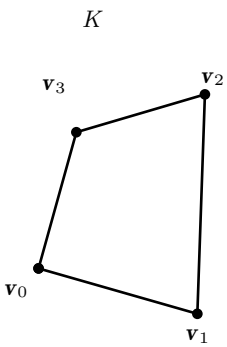
Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Exemple sur des mailles quadrilatérales

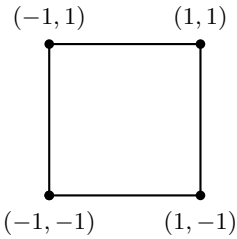




M. Köster, A. Ouazzi, F. Schieweck, S. Turek, and P. Zajac, "New robust nonconforming finite elements of higher order", 2012

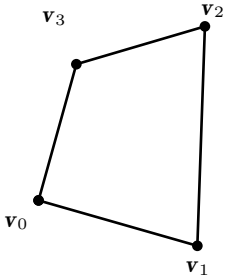
Exemple sur des mailles quadrilatérales

$\widehat{K}$



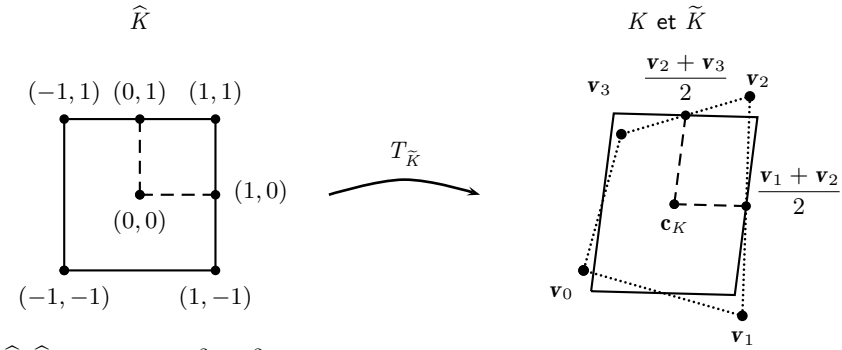
$$\widehat{P}(\widehat{K}) := \{1, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2\}$$

K



M. Köster, A. Ouazzi, F. Schieweck, S. Turek, and P. Zajac, "New robust nonconforming finite elements of higher order", 2012

Exemple sur des mailles quadrilatérales

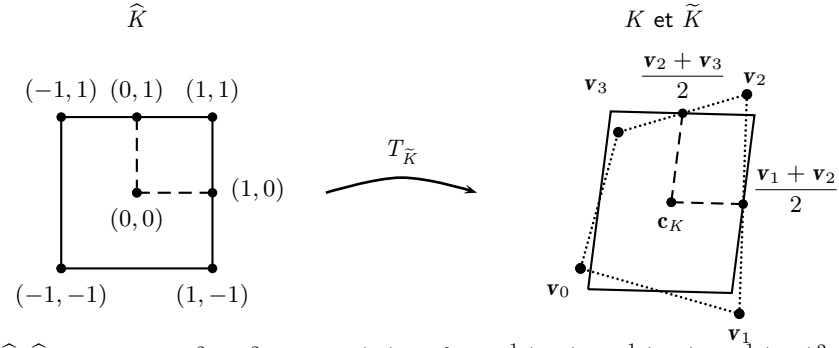


$$\widehat{P}(\widehat{K}) := \{1, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2\}$$

$T_{\widetilde{K}}(0,0) = \boldsymbol{c}_K$, $T_{\widetilde{K}}(1,0) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{c}_K$ et $T_{\widetilde{K}}(0,1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) - \boldsymbol{c}_K$.

M. Köster, A. Ouazzi, F. Schieweck, S. Turek, and P. Zajac, "New robust nonconforming finite elements of higher order", 2012

Exemple sur des mailles quadrilatérales



$$\widehat{P}(\widehat{K}) := \{1, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2\}$$

$$P(K) := \{1,\, T^{-1}_{\widetilde{K},1}(x,y),\, T^{-1}_{\widetilde{K},1}(x,y),\, T^{-1}_{\widetilde{K},1}(x,y)^2 - T^{-1}_{\widetilde{K},2}(x,y)^2\}$$
$$\sim \{1, x, y,\, T^{-1}_{\widetilde{K},1}(x,y)^2 - T^{-1}_{\widetilde{K},2}(x,y)^2\}$$

$T_{\widetilde{K}}(0,0) = \boldsymbol{c}_K,\ T_{\widetilde{K}}(1,0) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{c}_K$ et $T_{\widetilde{K}}(0,1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) - \boldsymbol{c}_K$.

M. Köster, A. Ouazzi, F. Schieweck, S. Turek, and P. Zajac, "New robust nonconforming finite elements of higher order", 2012

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Résultats numériques : maillages à faces planes

$$\Omega = [0,1]^3, \quad u(x,y,z) = sin(\pi x) sin(\pi y) sin(\pi z)$$

Résultats numériques : maillages à faces planes

$$\Omega = [0,1]^3, \quad u(x,y,z) = sin(\pi x) sin(\pi y) sin(\pi z)$$
$$\Longrightarrow f = -\Delta u, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Résultats numériques : maillages à faces planes

$$\Omega = [0,1]^3, \quad u(x,y,z) = sin(\pi x) sin(\pi y) sin(\pi z)$$
$$\Longrightarrow f = -\Delta u, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

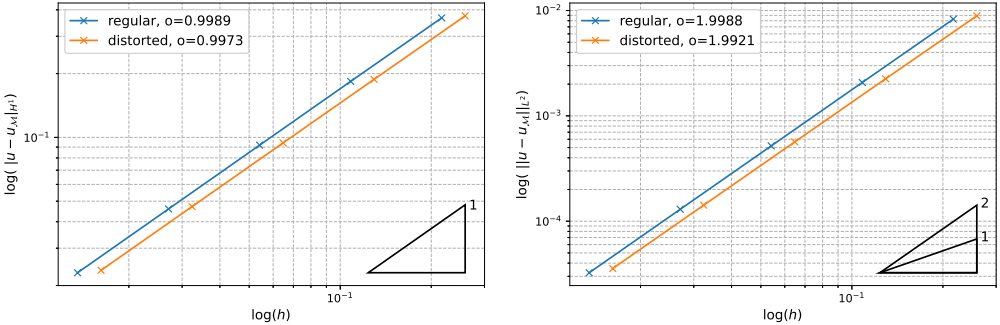


Figure: Ordre de convergence sur des maillages réguliers et déformés hexaédriques.

Résultats numériques : maillages à faces planes

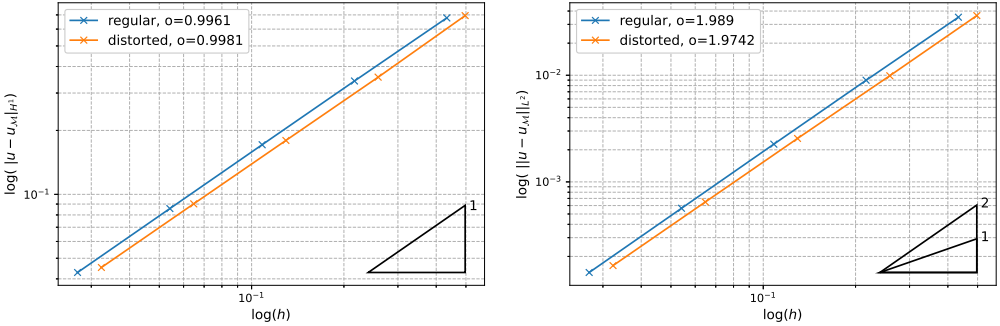


Figure: Ordre de convergence sur des maillages réguliers et déformés prismatiques.

Résultats numériques : maillages à faces planes

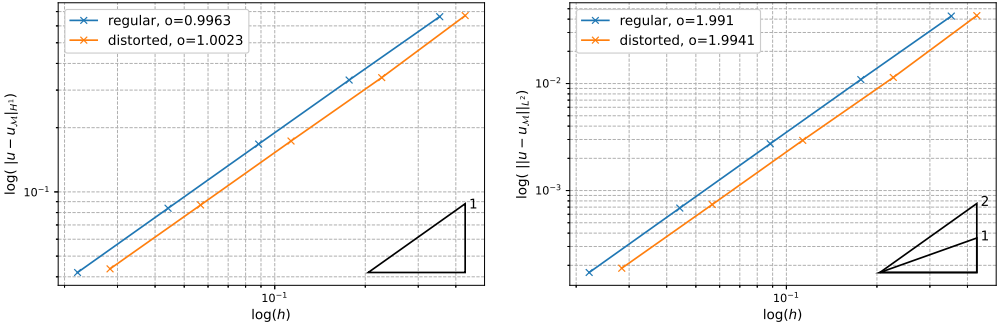


Figure: Ordre de convergence sur des maillages réguliers et déformés pyramidaux.

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
Définition et construction des espaces discrets
Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
Erreur d'interpolation
Erreur de consistance pour des faces planes
Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
Méthodologie dans le cas général
Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
Tests sur des maillages à faces planes
Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Résultats numériques : maillages à faces courbes

$$\Omega = [0,1]^3, \quad u(x,y,z) = sin(\pi x) sin(\pi y) sin(\pi z)$$
$$\Longrightarrow f = -\Delta u, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Résultats numériques : maillages à faces courbes

$$\Omega = [0,1]^3, \quad u(x,y,z) = sin(\pi x) sin(\pi y) sin(\pi z)$$
$$\Longrightarrow f = -\Delta u, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

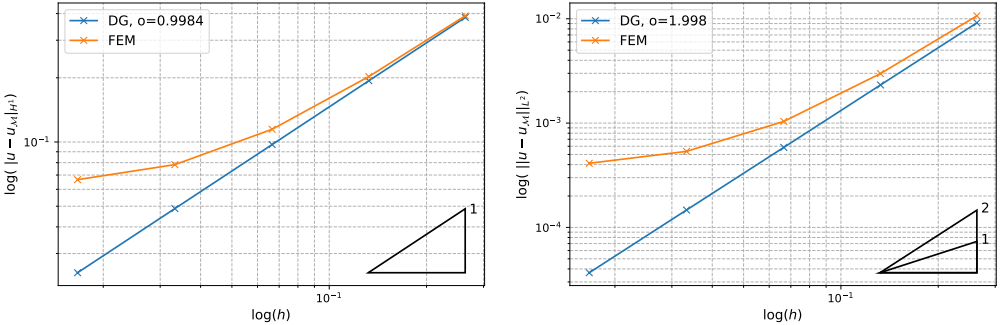


Figure: Ordre de convergence sur des maillages hexaédriques à faces courbes pour la méthode EF et la méthode DG.

Résultats numériques : maillages à faces courbes

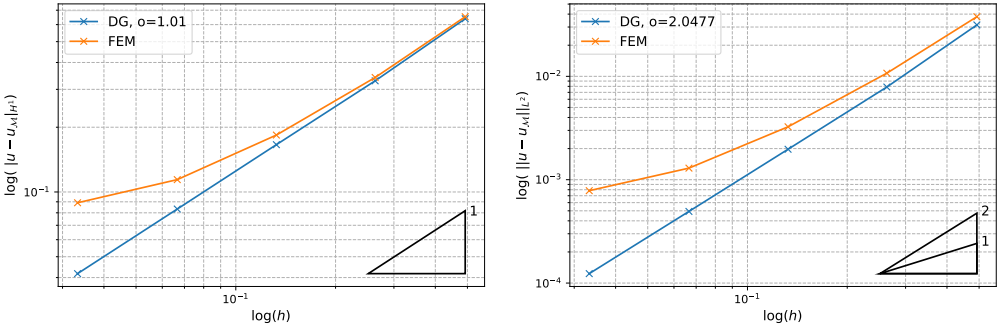


Figure: Ordre de convergence sur des maillages prismatiques à faces courbes pour la méthode EF et la méthode DG.

Résultats numériques : maillages à faces courbes

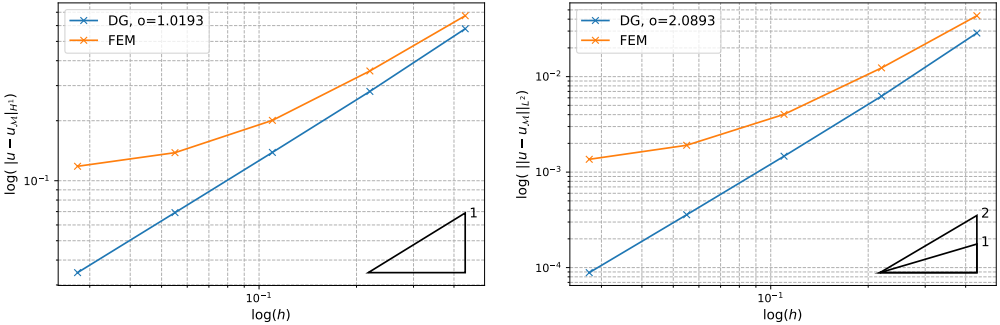


Figure: Ordre de convergence sur des maillages pyramidaux à faces courbes pour la méthode EF et la méthode DG.

Eléments finis avec inconnues aux faces pour des problèmes elliptiques
- Problème de Poisson : formulation faible et problème discret
- Définition et construction des espaces discrets
- Méthodes de la littérature

Analyse a priori du schéma
- Erreur d'interpolation
- Erreur de consistance pour des faces planes
- Le cas des faces non-planes

Définition de $P(K)$
- Méthodologie dans le cas général
- Exemple sur des mailles quadrilatérales

Résultats numériques
- Tests sur des maillages à faces planes
- Tests sur des maillages à faces courbes

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Travail effectué :

- Analyse a priori pour le problème de Poisson et de Stokes sur différents types de mailles planes.

Conclusions et perspectives

Travail effectué :

- Analyse a priori pour le problème de Poisson et de Stokes sur différents types de mailles planes.
- Construction des espaces polynomiaux pour de nouvelles formes de mailles.

Conclusions et perspectives

Travail effectué :

- Analyse a priori pour le problème de Poisson et de Stokes sur différents types de mailles planes.
- Construction des espaces polynomiaux pour de nouvelles formes de mailles.

Prochaines étapes :

- Finir l'analyse du schéma dans le cas des faces courbes.

Conclusions et perspectives

Travail effectué :

- Analyse a priori pour le problème de Poisson et de Stokes sur différents types de mailles planes.
- Construction des espaces polynomiaux pour de nouvelles formes de mailles.

Prochaines étapes :

- Finir l'analyse du schéma dans le cas des faces courbes.
- Trouver une discrétisation dans le cas de maillages à faces courbes pour les équations de Stokes.

Conclusions et perspectives

Travail effectué :

- Analyse a priori pour le problème de Poisson et de Stokes sur différents types de mailles planes.
- Construction des espaces polynomiaux pour de nouvelles formes de mailles.

Prochaines étapes :

- Finir l'analyse du schéma dans le cas des faces courbes.
- Trouver une discrétisation dans le cas de maillages à faces courbes pour les équations de Stokes.
- Étudier ces méthodes éléments finis pour la discrétisation d'un terme de diffusion de vitesse dans l'équation de la quantité de mouvement sous la forme $\mathrm{div}(\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla}^t \boldsymbol{u})$ (lemme de Korn discret).

Merci pour votre attention !