Sommes de carrés en dimension infinie pour le contrôle optimal

Eloïse BERTHIER, Inria - Ecole Normale Supérieure - Paris
Justin CARPENTIER, Inria - Ecole Normale Supérieure - Paris
Alessandro RUDI, Inria - Ecole Normale Supérieure - Paris
Francis BACH, Inria - Ecole Normale Supérieure - Paris

Dans cet exposé [1], on introduit une méthode d'approximation pour résoudre un problème de contrôle optimal *via* le dual Lagrangien de sa formulation faible. Il s'agit plus précisément de trouver la sous-solution maximale de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman générée par le problème de contrôle [4]. Notre méthode est basée sur une représentation par somme de carrés des fonctions positives lisses [3]. Les représentations de polynômes positifs par sommes de carrés remontent à d'importants résultats des années 1990, comme ceux de Krivine-Stengle ou Putinar. S'il est clair qu'une somme de carrés de polynômes est un polynôme positif, ces théorèmes montrent que, réciproquement, sous certainess conditions sur leur domaine, les polynômes positifs peuvent être écrits comme somme de carrés de polynômes d'un certain degré. Parce que ces sommes de carrés peuvent être gérées efficacement numériquement, cela a permis l'essor du domaine de l'optimisation semi-algébrique, avec notamment la hiérarchie de Lasserre ou "moment - somme de carrés" dans les années 2000. Une des nombreuses applications de l'optimisation semi-algébrique est la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal polynomiaux [2]. Cependant, la hiérarchie de Lasserre est limitée à des problèmes entièrement polynomiaux, et la taille des problèmes à résoudre numériquement croît exponentiellement en la dimension de l'espace ambiant. Dans le domaine du contrôle, cela limite son applicabilité pratique aux systèmes de faible dimension, excluant ainsi les applications à la robotique.
En apprentissage automatique, les méthodes à noyaux ont prouvé leur efficacité pour des problèmes en grande dimension, bien au-delà des dimensions typiquement rencontrées en robotique. Cependant, alors que certains algorithmes classiques peuvent être adaptés aux méthodes à noyaux, il n'y a pas de façon unique et directe d'appliquer des méthodes à noyaux au contrôle optimal.
Le cadre des espaces de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) englobe les espaces de Sobolev, les polynômes, ainsi que de nombreux autres espaces. En particulier, en considérant un espace de Sobolev, nous prouvons que si le Hamiltonien du problème de contrôle est lisse, alors il peut être écrit comme une somme des carrés de fonctions lisses. La représentation par somme des carrés d'un fonction positive lisse est en dimension infinie, mais ne nécessite pas de construire de hiérarchie.
Nous nous concentrons sur les problèmes de contrôle pour lesquels la dynamique et la fonction de coût sont inconnues, mais seulement accessible *via* des observations, ce qui est proche du contexte de l'apprentissage par renforcement. À partir des observations, notre méthode calcule une approximation de la fonction valeur, en résolvant un problème SDP.

[1] E. Berthier, J. Carpentier, A. Rudi, F. Bach. *Infinite-dimensional sums-of-squares for optimal control.* arXiv preprint arXiv :2110.07396, 2021.

[2] J.-B. Lasserre, D. Henrion, C. Prieur, E. Trélat. *Nonlinear optimal control via occupation measures and LMI-relaxations.* SIAM J. on Contr. and Optim., **47(4)**, 1643–1666, 2008.

[3] U. Marteau-Ferey, F. Bach, A. Rudi. *Non-parametric models for non-negative functions.* In *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, 2020.

[4] R. Vinter. *Convex duality and nonlinear optimal control.* SIAM J. on Contr. and Optim., **31(2)**, 518–538, 1993.

Contact : eloise.berthier@inria.fr