Méthode de régularisation évanescente et éléments finis DKQ pour le problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique

Mohamed BOUKRAA, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Franck DELVARE, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme - Caen

En mécanique des structures, la flexion d'une plaque mince en la théorie de Kirchhoff-Love est régit par l'équation biharmonique, à laquelle s'ajoutent des conditions aux limites en tout point de la frontière. Ces conditions aux limites portent sur le déplacement transversal w, la rotation normale $\frac{\partial w}{\partial n}$, le moment $\mathcal{M}_n$ ou l'effort tranchant $\mathcal{V}_n$. Certaines limitations des outils expérimentaux ou des situations pratiques peuvent engendrer plusieurs difficultés comme par exemple le fait que les mesures, éventuellement entachées de bruit, ne soient faites que sur une partie de la frontière ou que les conditions aux limites soient mal connues. Nous nous intéressons ici au problème de Cauchy associé à l'équation biharmonique tel que les conditions aux limites sont accessibles uniquement sur une partie de la frontière Γ_d : $(\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_i, \Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset, \Gamma_d \neq \emptyset$ et $\Gamma_i \neq \emptyset)$

$$\begin{cases} \Delta^2 w = 0 & \text{dans } \Omega \\ w = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \tag{1}$$

Ce type de problème est un problème inverse ou mal posé en sens d'Hadamard [4], parce que même si une solution existe, elle est instable vis à vis des perturbations sur les données accessibles sur Γ_d. La résolution nécessite alors l'introduction d'une technique de régularisation. Nous utilisons la méthode de régularisation évanescente [2] qui permet de trouver, parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre, la solution du problème de Cauchy qui s'approche au mieux des données. Cette technique a déjà été proposée pour les problèmes de Cauchy associés à l'équation de Laplace, à l'élasticité linéaire, l'équation d'Helmholtz, ou à l'opérateur biharmonique [3] avec des conditions aux limites mathématiques. Nous proposons pour la mise en œuvre numérique l'utilisation des éléments finis de type Kirchhoff (DKQ [1]) dédiés à l'approximation de la déformée des plaques minces. Il s'agit d'éléments finis à 3 degrés de liberté par nœuds composés par le déplacement vertical w et les rotations dans chaque direction θ_x et θ_y. Nous présentons la reconstruction de la solution, sa dérivée normale ainsi que celle des efforts $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{V}_n$ sur la partie inconnue Γ_i de la frontière pour des domaines circulaires et rectangulaires. Des tests numériques réalisés montrent la précision et la robustesse de la méthode. Les performances de la méthode sont aussi étudiées en fonction de la taille de la partie de la frontière où les données sont accessibles, de la position et du nombre de mesures et du niveau de bruit affectant les données.

[1] J.-L. Batoz, M. B. Tahar. *Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, **18(11)**, 1655–1677, 1982. doi : https ://doi.org/10.1002/nme.1620181106.

[2] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons. *Une méthode inverse à régularisation évanescente.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, **328(9)**, 639–644, 2000.

[3] A. P. E. M. Ebang. *Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques.* Ph.D. thesis, Université de Poitiers, 2011.

[4] J. Hadamard, P. M. Morse. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Physics Today, **6(8)**, 18–18, 1953. doi :10.1063/1.3061337. _eprint : https ://doi.org/10.1063/1.3061337.

Contact : `mohamed.boukraa@uca.fr`