Camouflage acoustique passif en utilisant des fines cheminées résonantes

Lucas Chesnel

Jérémy Heleine

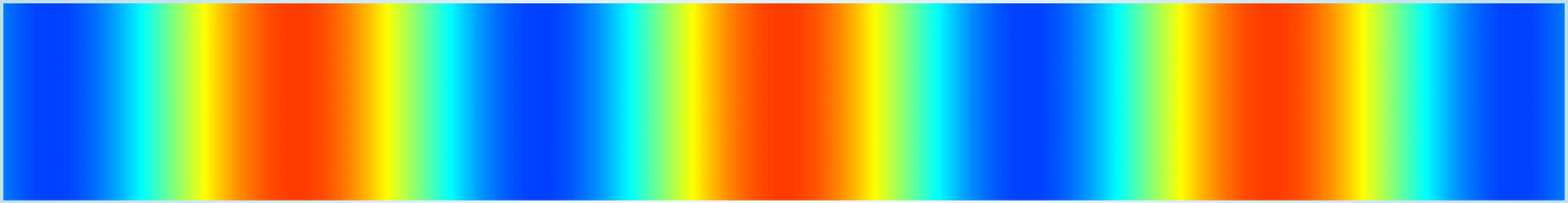
Sergei A. Nazarov

CANUM 2020 + 2
Evian-les-Bains

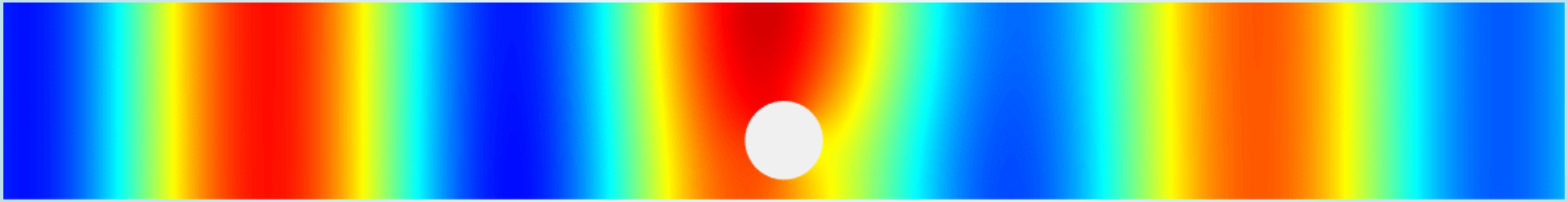
Jeudi 16 juin 2022

Introduction

Propagation d'une onde dans un guide acoustique, non borné dans la direction (Ox).



L'onde est diffractée par un obstacle.



Objectif Camoufler (à l'infini) l'obstacle pour retrouver une réflexion nulle et une transmission parfaite comme dans le guide de référence.

Sommaire

I. Ligaments fins

II. Réflexion nulle

III. Décalage de phase

IV. Camouflage

Ligaments fins

Ligaments fins

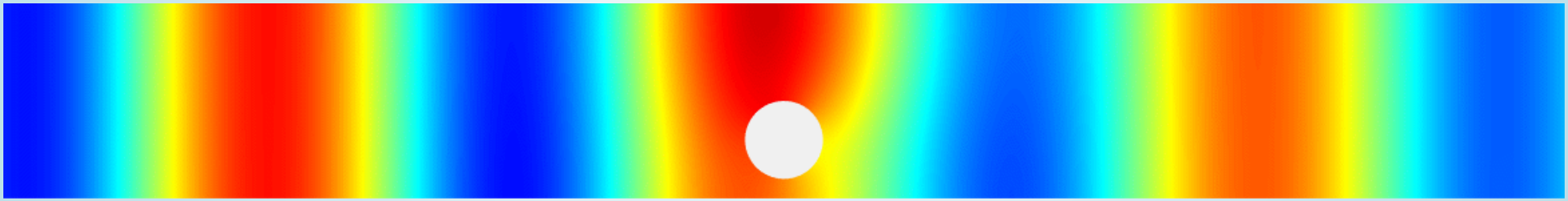
Ondes diffractées

On considère l'équation de Helmholtz dans un domaine Ω qui coïncide avec le guide de référence $\Omega_0 = \mathbb{R}\times]0,1[$ en dehors d'une région bornée :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le nombre d'onde k est fixé dans $]0,\pi[$, donc un seul mode propagatif existe : $w^{\pm}(x,y) = e^{\pm ikx}$.

Soit $u^{\pm}$ la solution générée par l'onde incidente $w^{\pm}$ venant de $\mp\infty$.



On a les décompositions :

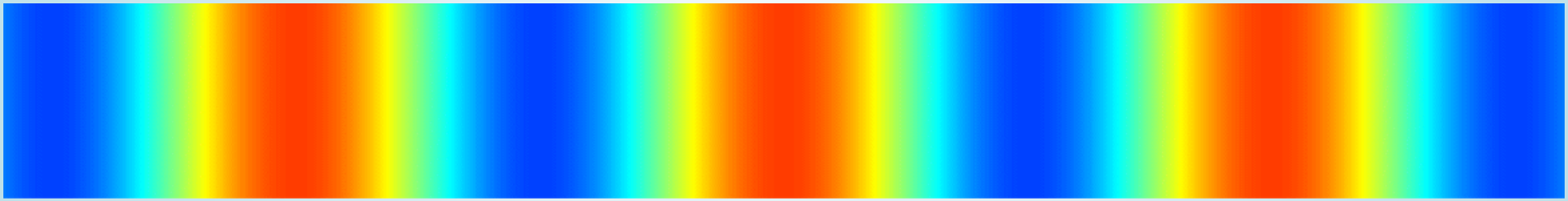
$$u^+ = \begin{cases} w^+ + R^+ w^- + \dots, & x \to -\infty, \\ T w^+ + \dots, & x \to +\infty, \end{cases} \qquad u^- = \begin{cases} T w^- + \dots, & x \to -\infty, \\ w^- + R^- w^+ + \dots, & x \to +\infty. \end{cases}$$

Ligaments fins

Proposition On a la relation de conservation d'énergie :

$$|R^{\pm}|^2 + |T|^2 = 1$$

Sans obstacle ($\Omega = \Omega_0$), $u^{\pm} = w^{\pm}$ et ainsi $R^{\pm} = 0$ et $T = 1$.

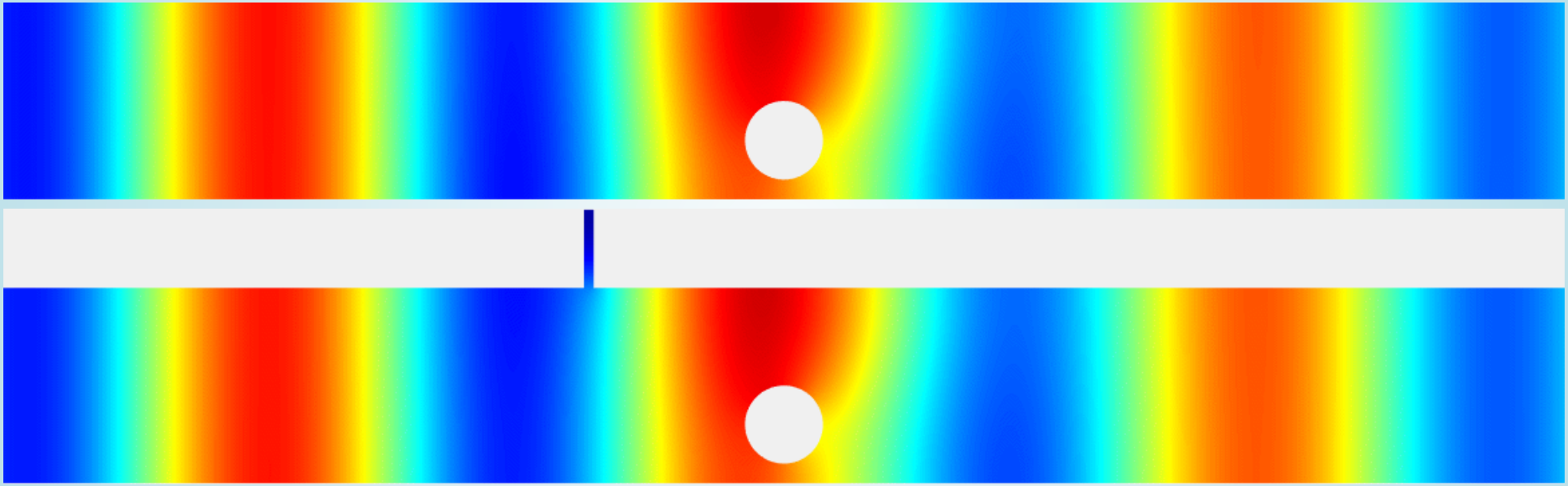


Objectif En présence d'un obstacle, on veut perturber la géométrie du guide pour obtenir $R^{\pm} \approx 0$ et $T \approx 1$.

Ligaments fins

Géométrie perturbée

On ajoute un ligament fin (de largeur $\varepsilon \ll 1$) en position $A = (p, 1)$.



Dans la nouvelle géométrie Ω^ε, les coefficients de diffraction de u_ε^+ sont notés R^ε et T^ε.

Problème En général, quand $\varepsilon \to 0$, on a $R^\varepsilon = R^+ + o(1)$ et $T^\varepsilon = T + o(1)$ et ainsi les ligaments n'ont presque pas d'influence.

Ligaments fins

Développement asymptotique

On choisit $\ell^\varepsilon = \ell + \varepsilon \ell'$ avec :

- $\ell \in \mathbb{R}^+$ (fixé plus tard),
- ℓ' un paramètre contrôlant la variation autour de ℓ.

Idée On calcule un développement asymptotique du champ u^ε et des coefficients de diffraction R^ε et T^ε, quand $\varepsilon \to 0$.

Voir par exemple : Beale 73 ; Gadyl'shin 93 ; Kozlov, Maz'ya, Movchan 94 ; Nazarov 96 ; Maz'ya, Nazarov, Plamenevskiĭ 00 ; Joly, Tordeux 06 ; Lin, Zhang 17 ; ...

Ligaments fins

Développement asymptotique

On travaille avec les développements suivants de u^ε :

- $u^\varepsilon(x,y) = u^0(x,y) + \dots$ dans le guide,
- $u^\varepsilon(x,y) = \varepsilon^{-1} v^{-1}(y) + v^0(y) + \dots$ dans le ligament.

En considérant la restriction du problème de Helmholtz au ligament, quand $\varepsilon \to 0$, on est amenés à étudier le problème 1D :

$$\begin{cases} v'' + k^2 v &= 0, \quad \text{dans }]1, 1+\ell[, \\ v(1) = v'(1+\ell) &= 0. \end{cases}$$

Définition

On appelle longueurs de résonance les réels ℓ_{res} tels que :

$$k\ell_{\text{res}} = \frac{\pi}{2} + m\pi, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Ligaments fins

Développement asymptotique

Rappel : la longueur du ligament est donnée par $\ell^\varepsilon = \ell + \varepsilon \ell'$.

Cas non résonant

Si $\ell \neq \ell_{\text{res}}$, alors $v^{-1} \equiv 0$ et on peut montrer :

$$u^\varepsilon(x,y) = u^+(x,y) + o(1), \qquad \text{dans le guide,}$$

$$u^\varepsilon(x,y) = u^+(A)v^0(y) + o(1), \qquad \text{dans le ligament.}$$

En particulier, on aura :

$$R^\varepsilon = R^+ + o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = T + o(1).$$

Ligaments fins

Développement asymptotique

Rappel : la longueur du ligament est donnée par $\ell^\varepsilon = \ell + \varepsilon \ell'$.

Cas non résonant

Si $\ell \neq \ell_{\text{res}}$, alors $v^{-1} \equiv 0$ et on peut montrer :

$$u^\varepsilon(x,y) = u^+(x,y) + o(1), \qquad \text{dans le guide,}$$

$$u^\varepsilon(x,y) = u^+(A)v^0(y) + o(1), \qquad \text{dans le ligament.}$$

En particulier, on aura :

$$R^\varepsilon = R^+ + o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = T + o(1).$$

Cas résonant

Si $\ell = \ell_{\text{res}}$, alors $v^{-1} = a\sin(k(\cdot - 1)), a \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$R^\varepsilon = R^+ + i\frac{a}{2}u^+(A) + o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = T + i\frac{a}{2}u^-(A) + o(1).$$

De plus, $a = -\frac{u^+(A)}{C(A)+\eta_\varepsilon(\ell')}$ où $C(A) \in \mathbb{C}$ dépend de la position A et $\eta_\varepsilon(\ell') \in \mathbb{R}$ dépend de ε et du paramètre de longueur.

Ligaments fins

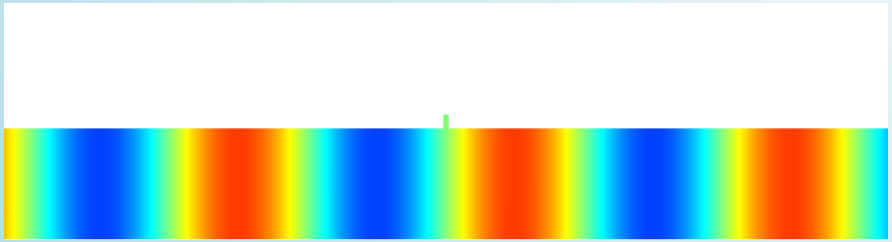
Exemple

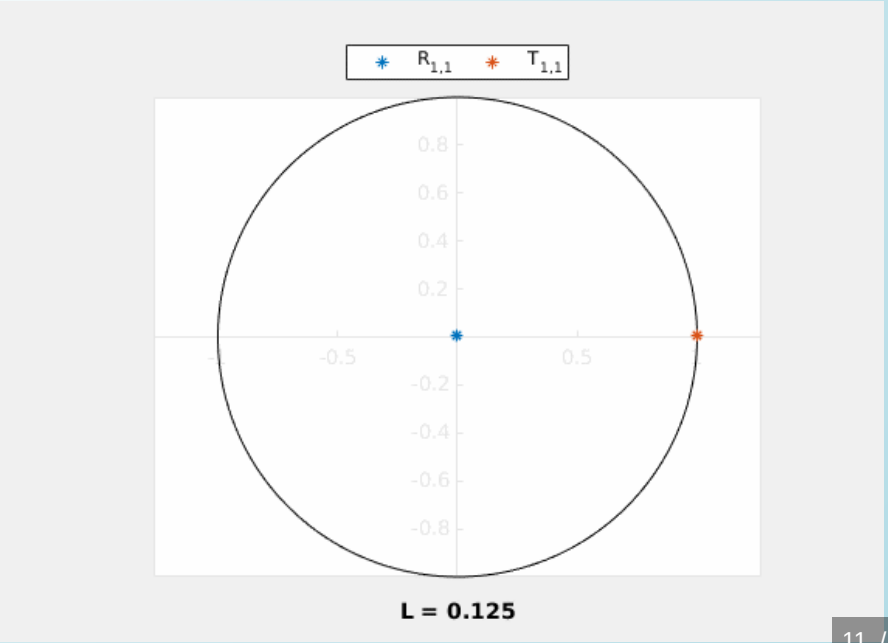
On perturbe le guide de référence avec un ligament en position $A = (0, 1)$, on obtient :

$$R^\varepsilon = -i\frac{1}{2\eta + i} + o(1), \quad T^\varepsilon = 1 - i\frac{1}{2\eta + i} + o(1).$$

Interprétation

En faisant varier la longueur du ligament autour de ℓ_{res}, η parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi, à l'ordre 1, R^ε parcourt le cercle $\mathcal{C}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et T^ε parcourt le cercle $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.





Ligaments fins

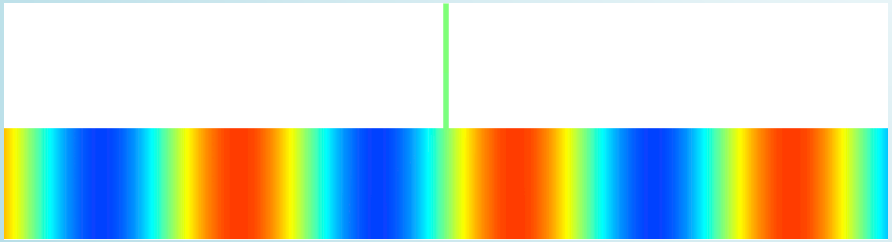
Exemple

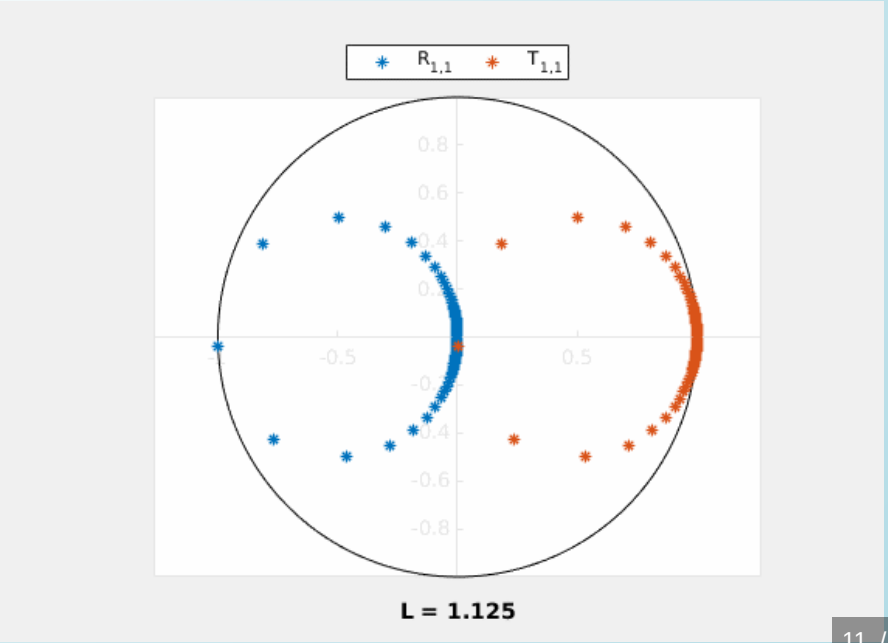
On perturbe le guide de référence avec un ligament en position $A = (0, 1)$, on obtient :

$$R^\varepsilon = -i\frac{1}{2\eta + i} + o(1), \quad T^\varepsilon = 1 - i\frac{1}{2\eta + i} + o(1).$$

Interprétation

En faisant varier la longueur du ligament autour de ℓ_{res}, η parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi, à l'ordre 1, R^ε parcourt le cercle $\mathcal{C}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et T^ε parcourt le cercle $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.





Ligaments fins

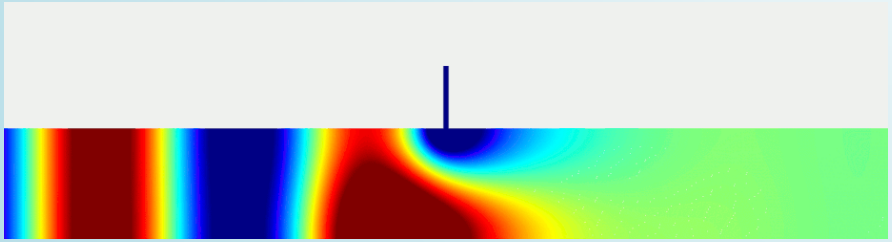
Exemple

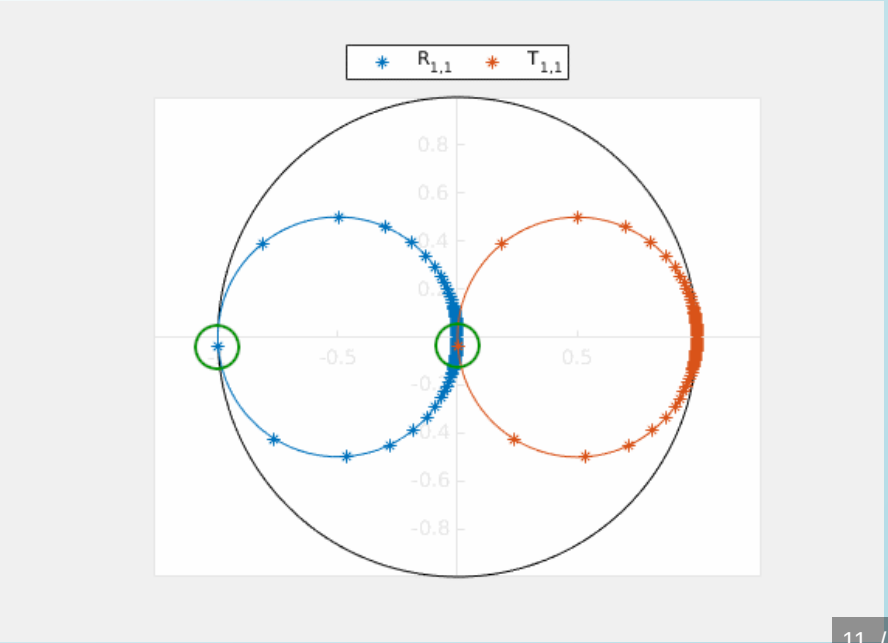
On perturbe le guide de référence avec un ligament en position $A = (0, 1)$, on obtient :

$$R^\varepsilon = -i\frac{1}{2\eta + i} + o(1), \quad T^\varepsilon = 1 - i\frac{1}{2\eta + i} + o(1).$$

Interprétation

En faisant varier la longueur du ligament autour de ℓ_{res}, η parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi, à l'ordre 1, R^ε parcourt le cercle $\mathcal{C}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et T^ε parcourt le cercle $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



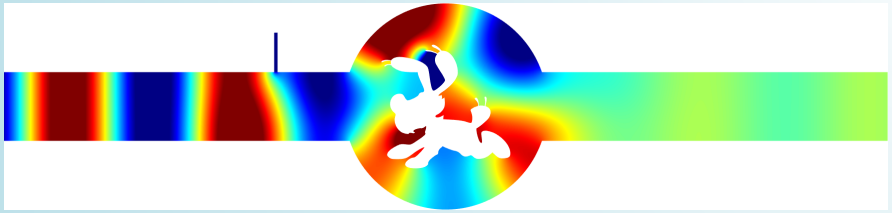


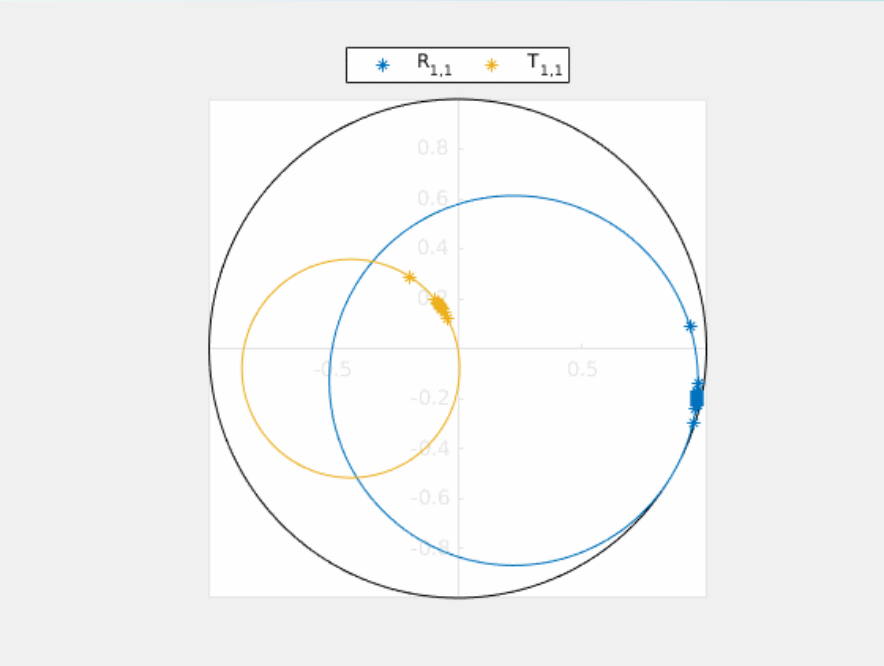
Réflexion nulle

Réflexion nulle

Les termes principaux dans les développements de R^ε et T^ε dépendent de la position A du ligament. Les formules précédentes clarifient cette dépendance :

$$R^\varepsilon = R^+ + i\frac{a}{2}u^+(A) + o(1), \qquad T^\varepsilon = T + i\frac{a}{2}u^-(A) + o(1)$$

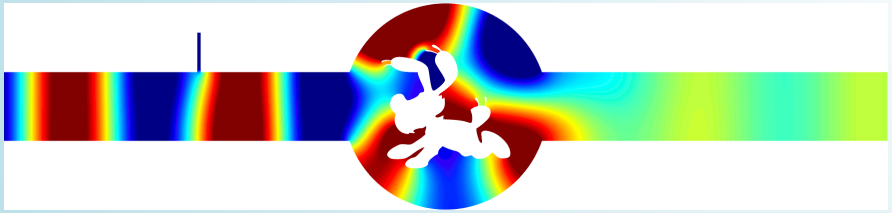


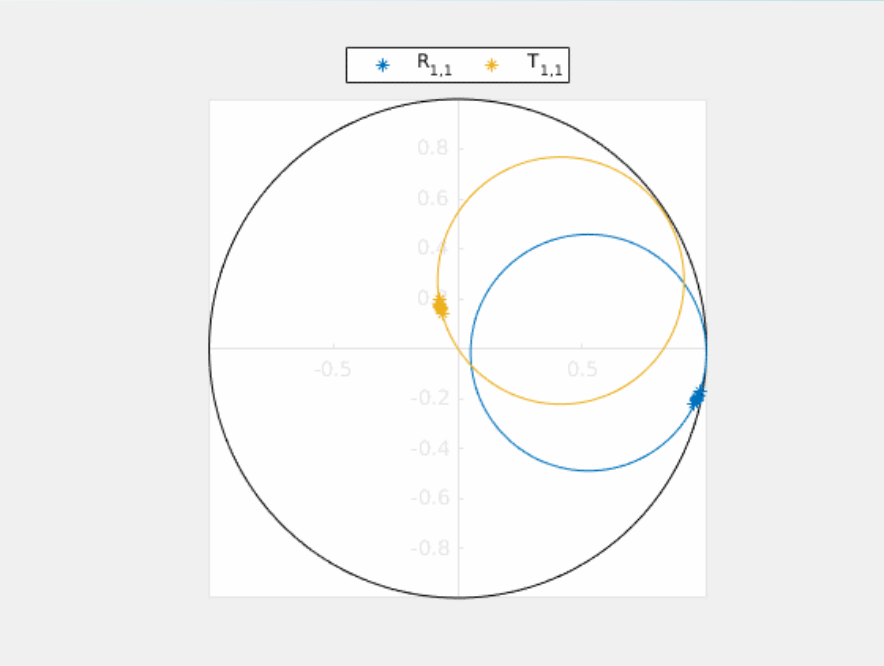


Réflexion nulle

Les termes principaux dans les développements de R^ε et T^ε dépendent de la position A du ligament. Les formules précédentes clarifient cette dépendance :

$$R^\varepsilon = R^+ + i\frac{a}{2}u^+(A) + o(1), \quad T^\varepsilon = T + i\frac{a}{2}u^-(A) + o(1)$$

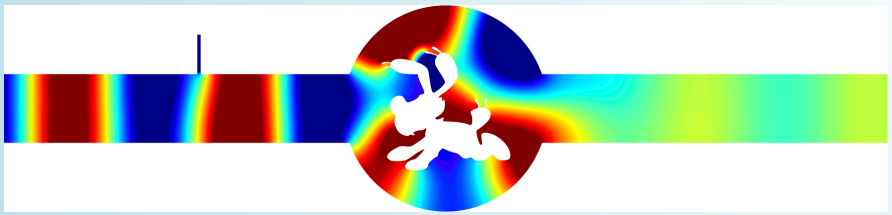


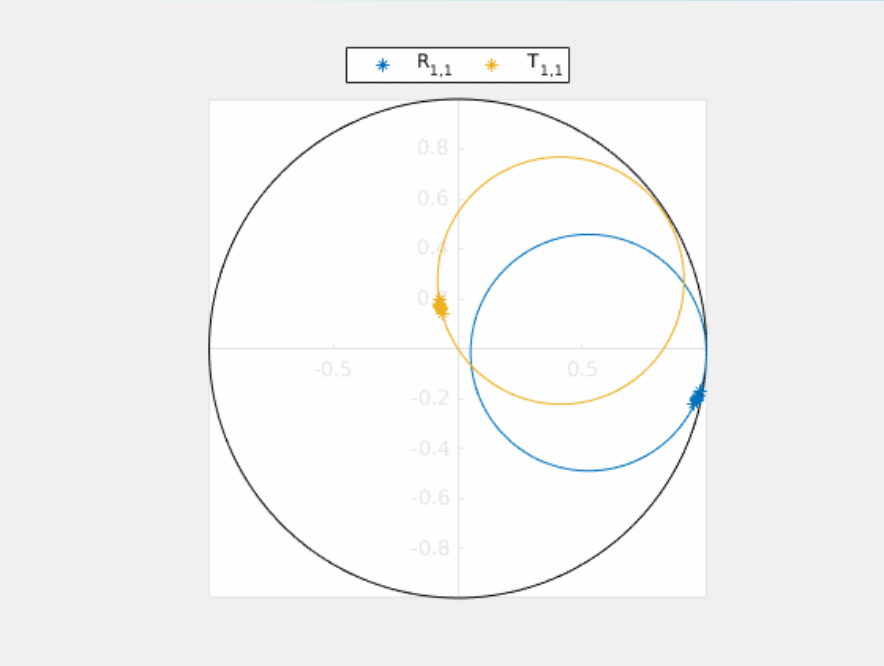


Réflexion nulle

Les termes principaux dans les développements de R^ε et T^ε dépendent de la position A du ligament. Les formules précédentes clarifient cette dépendance :

$$R^\varepsilon = R^+ + i\frac{a}{2}u^+(A) + o(1), \qquad T^\varepsilon = T + i\frac{a}{2}u^-(A) + o(1)$$



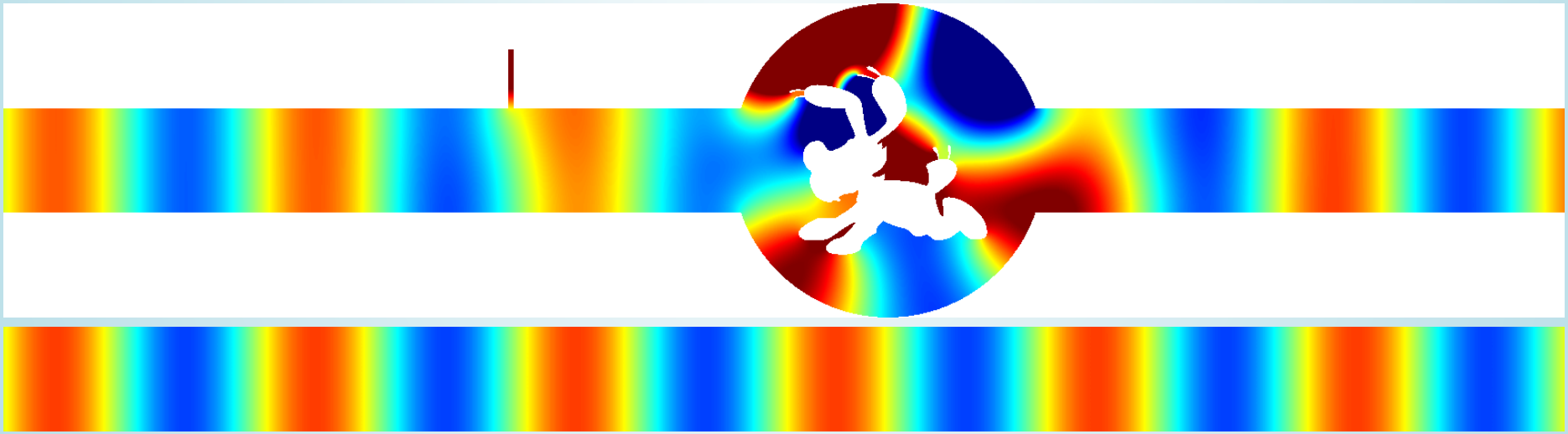


Remarque Pour certaines positions A, R^ε parcourt un cercle qui passe par zéro.

Réflexion nulle

Proposition Supposons $R \neq 0$ et $T \neq 0$. Alors on peut trouver des positions A du ligament et régler sa longueur pour obtenir, quand $\varepsilon \to 0$:

$$R^\varepsilon = o(1)$$



Problématique On a $|T^\varepsilon| = 1 + o(1)$ mais pas nécessairement $T^\varepsilon = 1 + o(1)$!

Décalage de phase

Décalage de phase

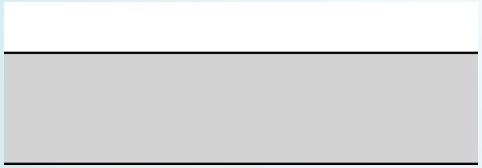
Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

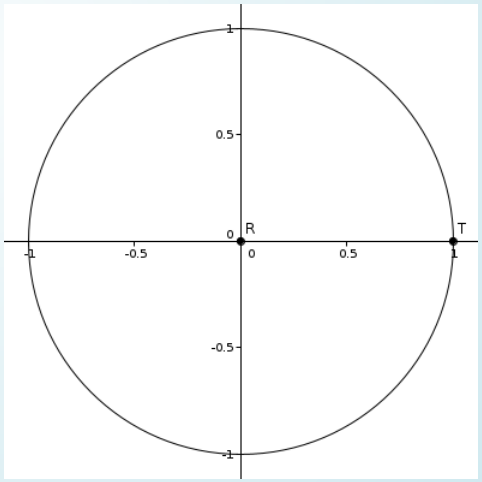
$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$

Décalage de phase

Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$

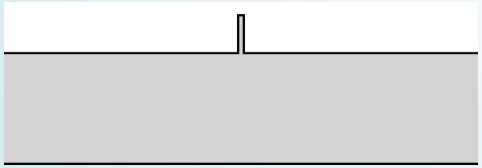


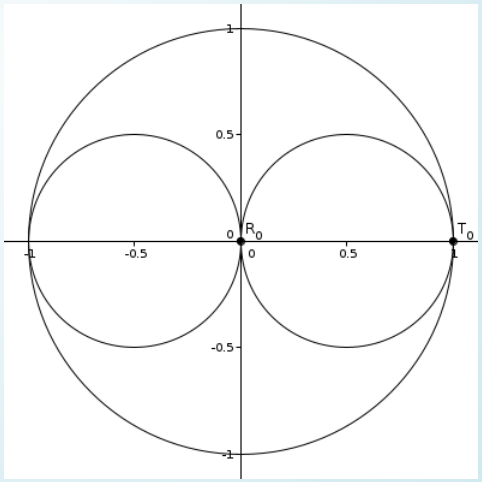


Décalage de phase

Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$

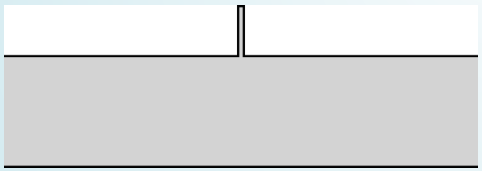


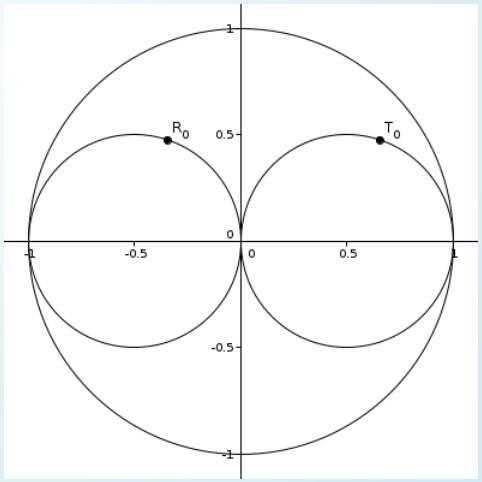


Décalage de phase

Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$

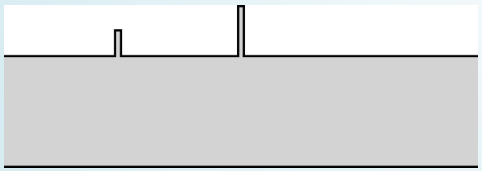


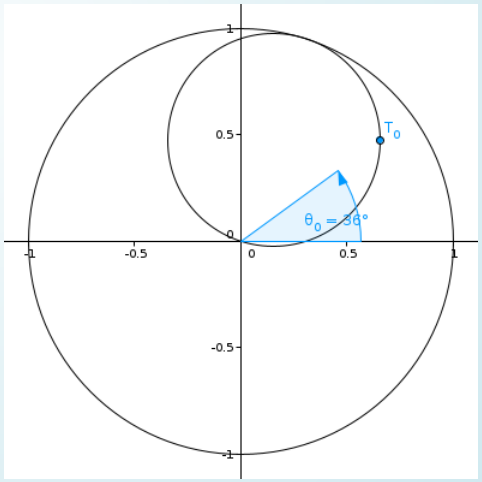


Décalage de phase

Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$

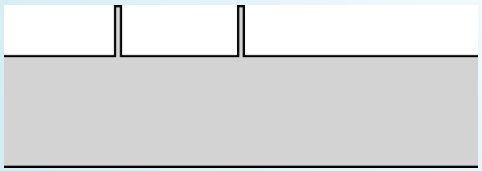


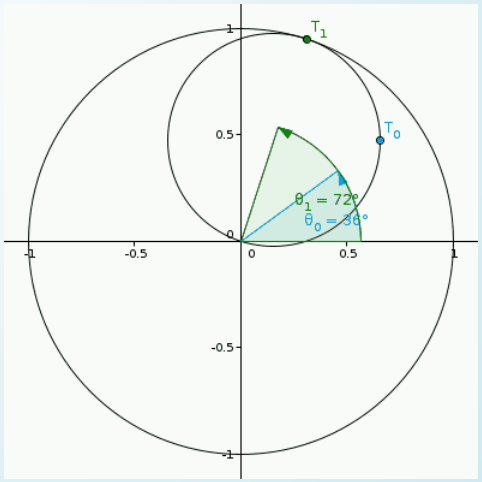


Décalage de phase

Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$



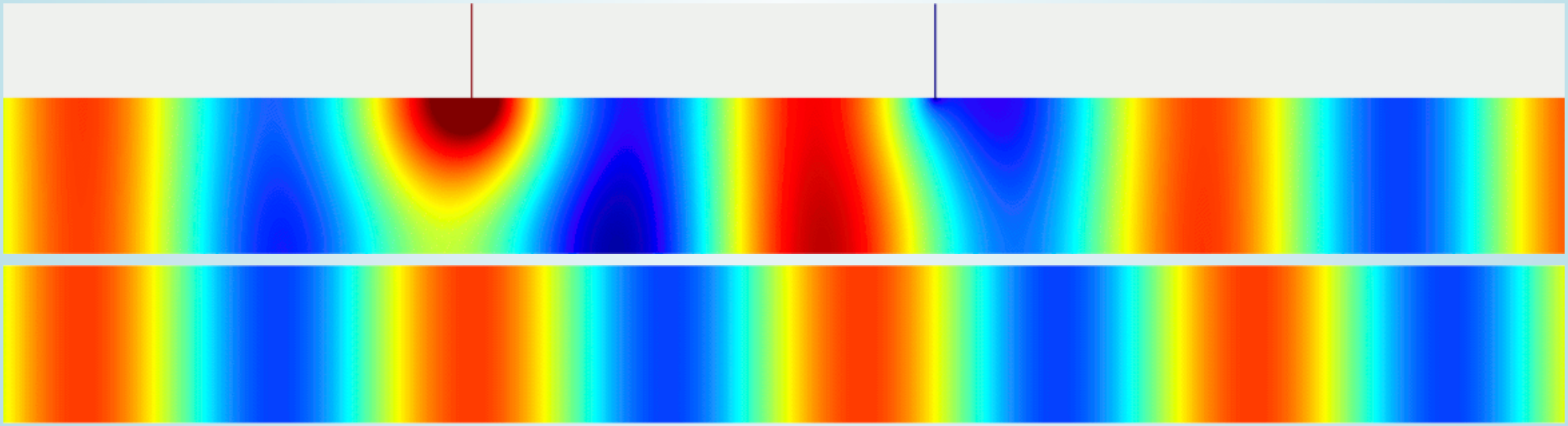


En notant $T_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ et $T_1 = e^{i\theta_1}$, on a $\theta_1 = 2\theta_0$.
Comme $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a alors $\theta_1 \in]-\pi, \pi[$.

Décalage de phase

Proposition Soit $\mu \in]-\pi, \pi[$. Il est possible de placer deux ligaments sur le guide de référence Ω_0 et de régler leurs longueurs pour obtenir :

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = e^{i\mu} + o(1).$$



Camouflage

Camouflage

Méthode 1 : 3 ligaments

Idée Combiner les dispositifs d'annulation de réflexion et de décalage de phase.

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

- ajouter un ligament pour obtenir une réflexion quasi-nulle,
- ajouter deux ligaments pour compenser le décalage de phase.

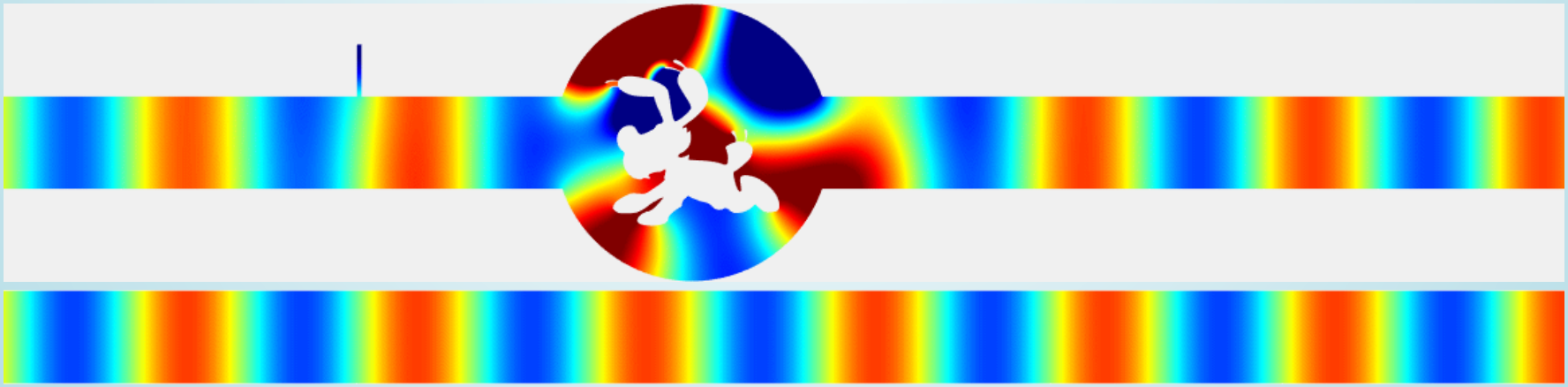
Camouflage

Méthode 1 : 3 ligaments

Idée Combiner les dispositifs d'annulation de réflexion et de décalage de phase.

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

- ajouter un ligament pour obtenir une réflexion quasi-nulle,
- ajouter deux ligaments pour compenser le décalage de phase.



$$R \approx 0, \quad T \approx e^{0.59i}$$

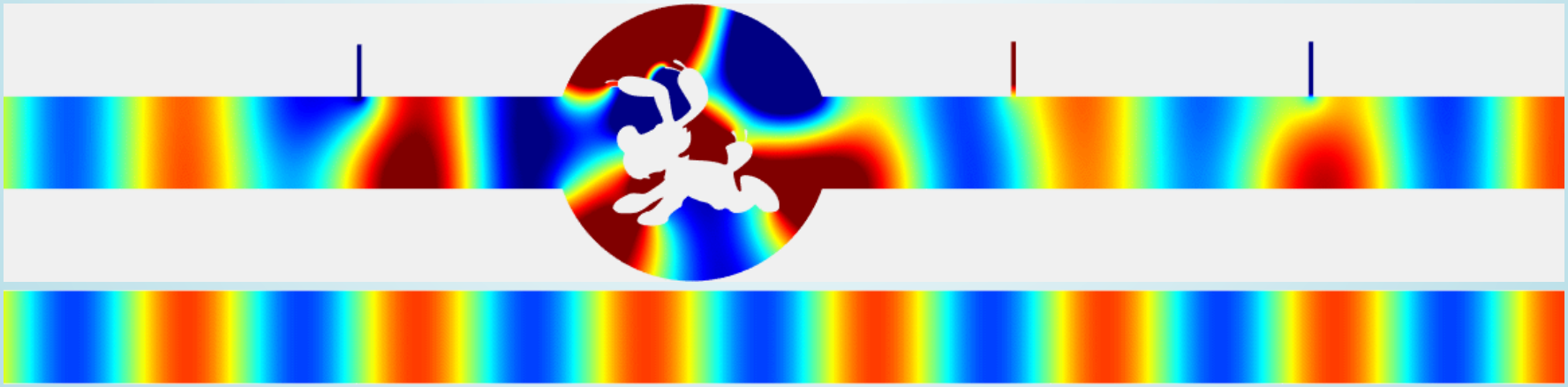
Camouflage

Méthode 1 : 3 ligaments

Idée Combiner les dispositifs d'annulation de réflexion et de décalage de phase.

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

- ajouter un ligament pour obtenir une réflexion quasi-nulle,
- ajouter deux ligaments pour compenser le décalage de phase.



$$R \approx 0, \quad T \approx 1$$

Camouflage

Le cercle cible

Remarque Avec un ligament à position fixée, T^ε parcourt un cercle passant par 0 et par T.

Pour camoufler l'obstacle, ce cercle doit forcément passer par 1.

Proposition Si $T \in \mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on peut trouver des position du ligament et régler sa longueur pour obtenir

$$R^\varepsilon = o(1) \quad \text{et} \quad T^\varepsilon = 1 + o(1).$$

Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

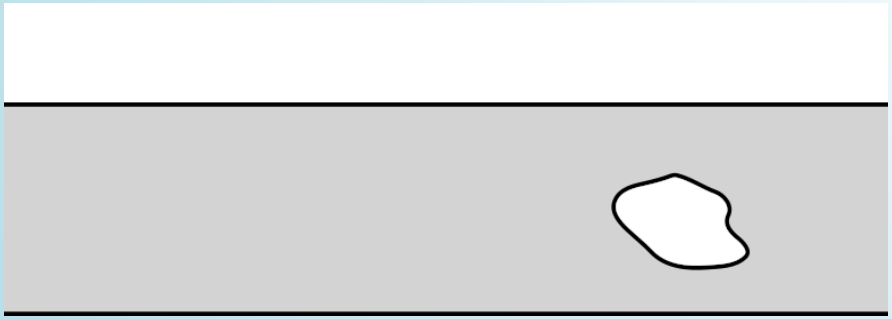
1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.

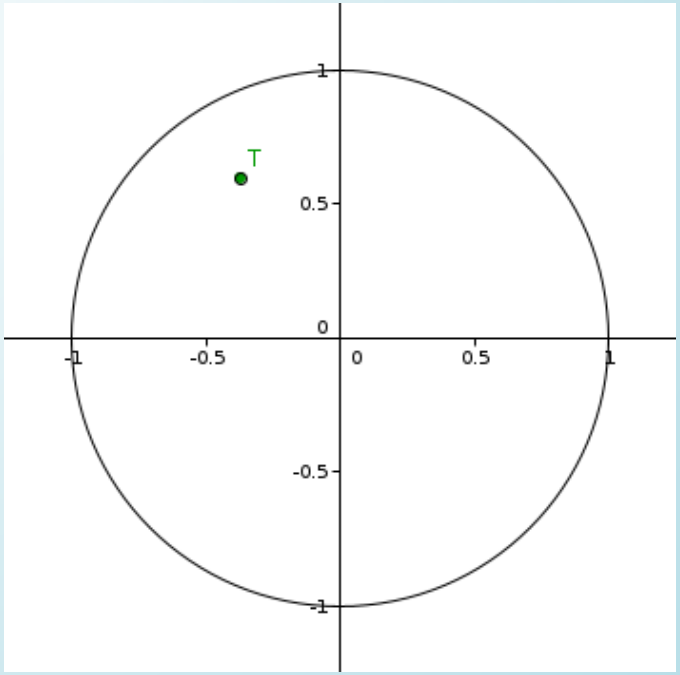
Camouflage

Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.



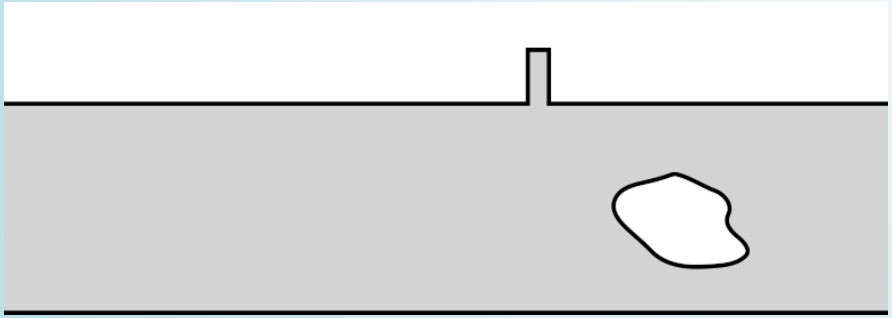


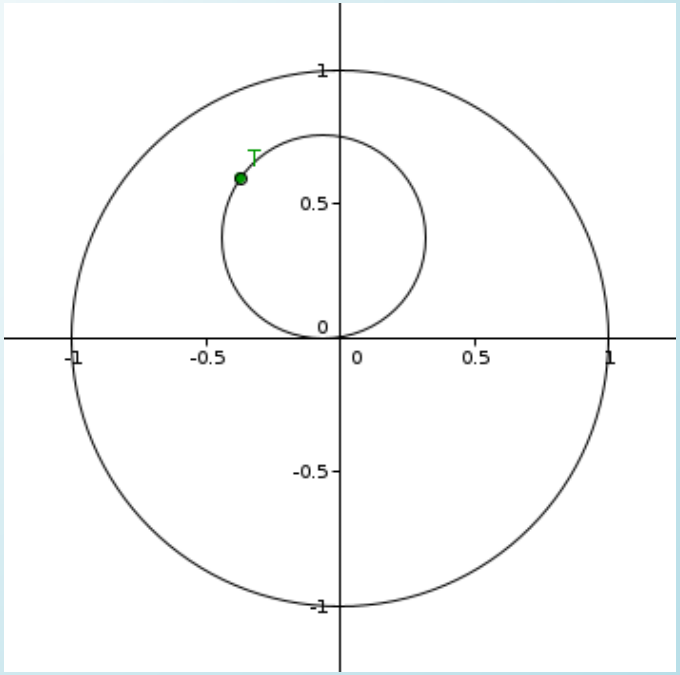
Camouflage

Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.





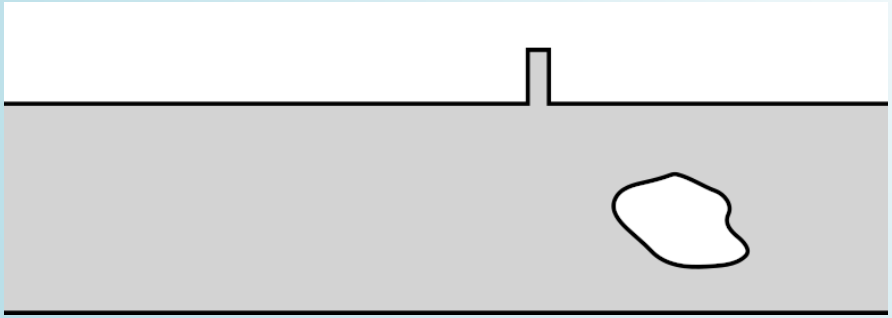
Camouflage

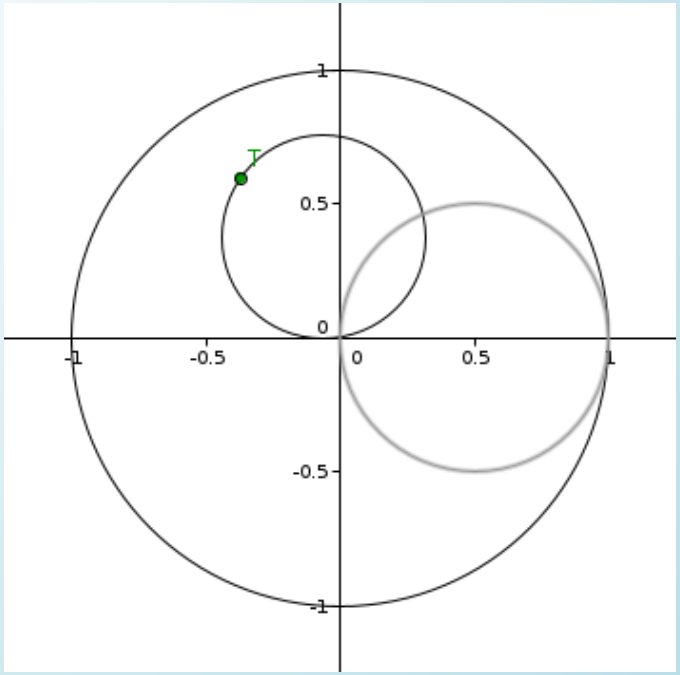
Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.





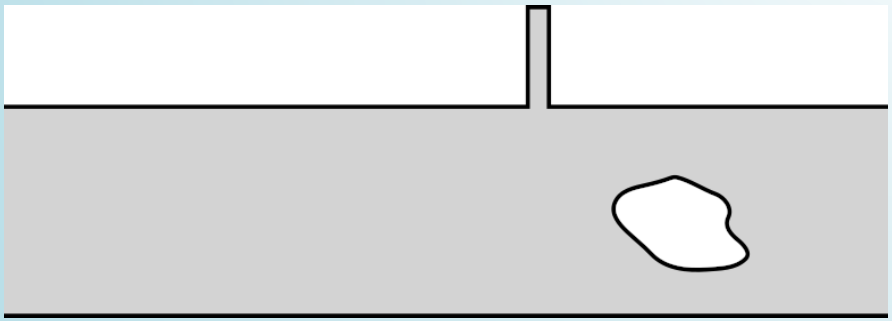
Camouflage

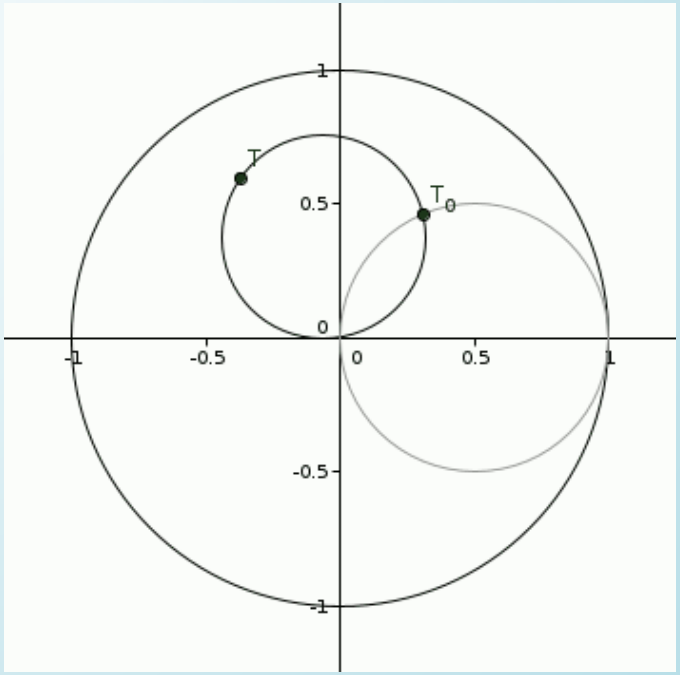
Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.



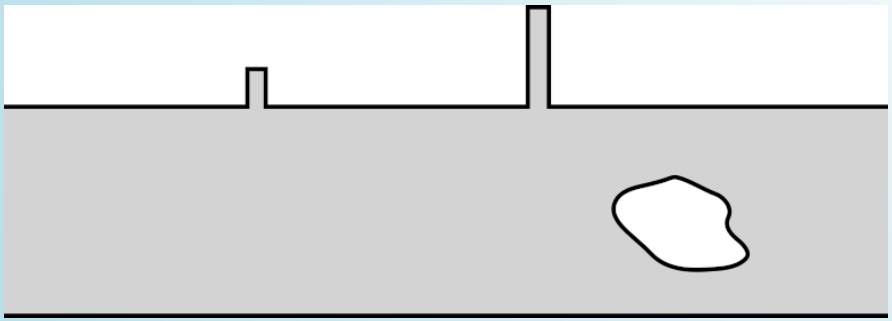


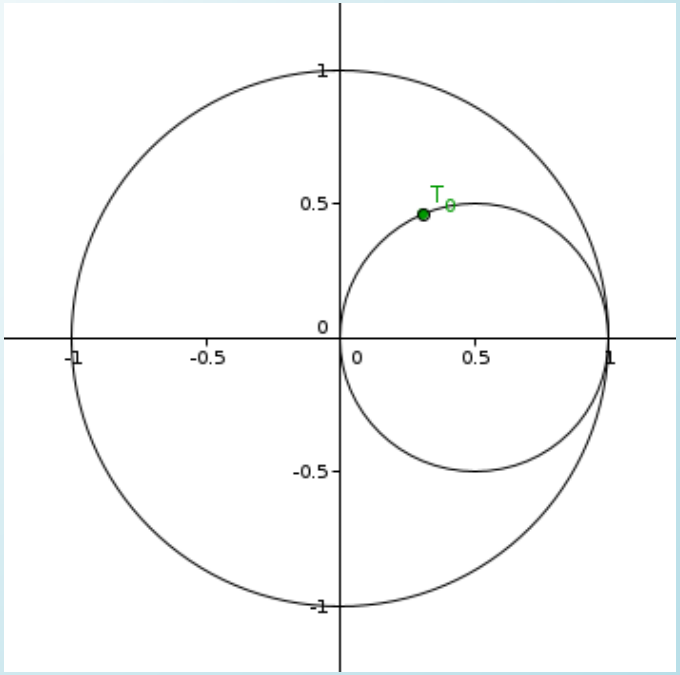
Camouflage

Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.





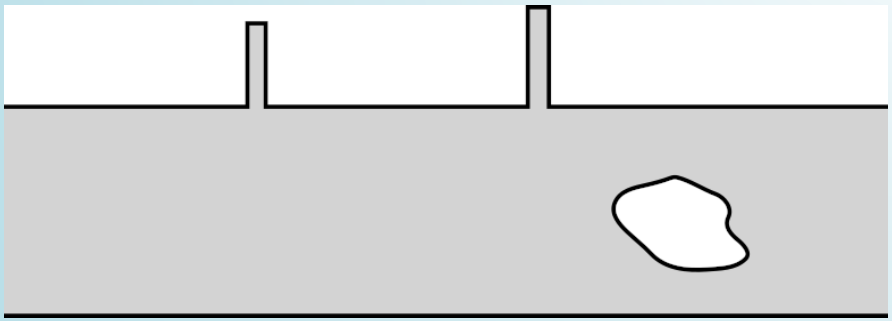
Camouflage

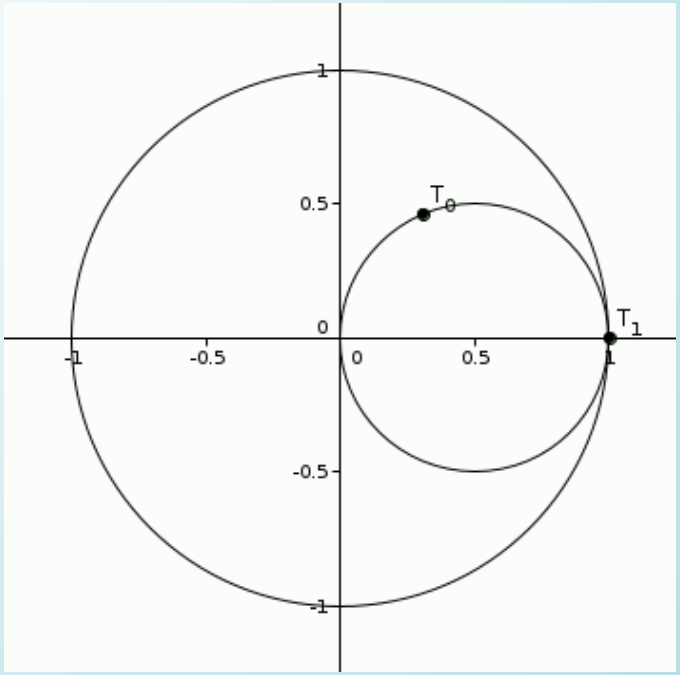
Méthode 2 : 2 ligaments

Algorithme

Il est possible de camoufler un obstacle en deux étapes :

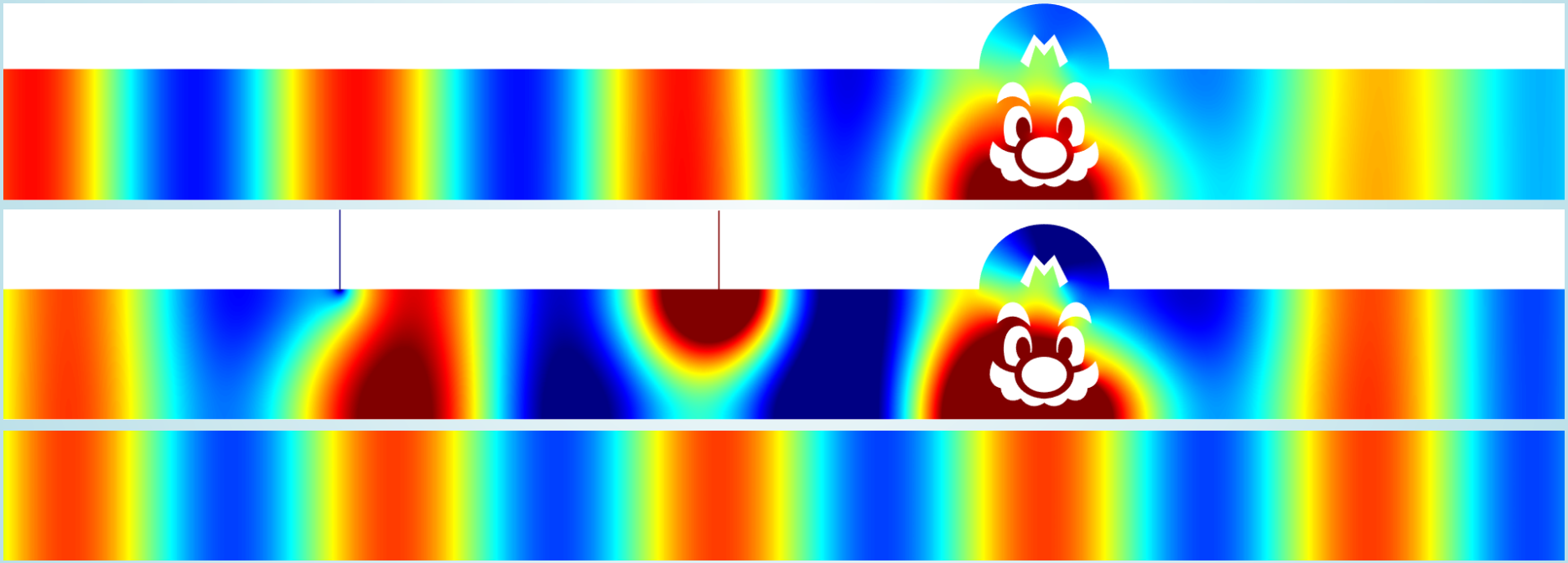
1. positionner un premier ligament et régler sa longueur pour avoir un coefficient de transmission sur $\mathcal{C}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
2. positionner un second ligament pour annuler la réflexion.





Camouflage

Méthode 2 : 2 ligaments



Conclusion

Conclusion

Résultats

- On peut cacher des obstacles pénétrables ou non, et la méthode peut être adaptée en 3D.
- La forme des résonateurs n'est pas cruciale : avec des ligaments courbés, les résultats seraient similaires.
- Il est possible de camoufler un obstacle pour un ensemble discret de fréquences.

Conclusion

Résultats

- On peut cacher des obstacles pénétrables ou non, et la méthode peut être adaptée en 3D.
- La forme des résonateurs n'est pas cruciale : avec des ligaments courbés, les résultats seraient similaires.
- Il est possible de camoufler un obstacle pour un ensemble discret de fréquences.

Questions ouvertes

- Avec des conditions de bord de Dirichlet, on doit travailler avec un autre type de résonateur.
- La question du camouflage avec un nombre d'onde plus élevé (plusieurs modes propagatifs) reste ouverte.
- On n'a pas exactement $R = 0$ et $T = 1$: l'approximation dépend de ε. On peut obtenir une erreur théorique aussi petite que l'on veut en diminuant ε mais on perd alors la robustesse.

Merci de votre attention