Contrôle Optimal Numérique appliqué au trafic routier

Mickael BESTARD, IRMA - Strasbourg
Emmanuel FRANCK, IRMA - Strasbourg - INRIA
Laurent NAVORET, IRMA - Strasbourg
Yannick PRIVAT, IRMA - Strasbourg - IUF

Dans cet exposé nous nous intéressons au contrôle d'un modèle continu de trafic routier, appliqué à la gestion de crise impliquant des véhicules en milieu urbain.

Le problème se formalise à l'aide d'un graphe orienté où les arêtes sont les routes et les sommets les carrefours. Si le modèle fluide décrivant l'écoulement est très standard (Lighthill-Whitham-Richards, 1955), le problème de distribution des flux aux jonctions réalise un couplage non-linéaire entre les différentes arêtes, s'inspirant de travaux récents [2],[3].
Ainsi, la répartition des véhicules aux carrefours est modélisée par un processus de redistribution optimale dépendant des flux maximaux atteignables aux jonctions, par l'intermédiaire d'un problème de programmation linéaire visant à maximiser les flux. Dans le but de se donner un moyen d'action sur le trafic routier, on introduit des fonctions de contrôle définies en chaque entrée de route, agissant comme un barrage en pondérant la capacité d'une route sortant d'une jonction à accueillir de nouveaux véhicules. On désigne par $\boldsymbol{u}$ le vecteur des fonctions de contrôle. Voir [1] pour une autre approche de ce problème.

L'évolution sur des routes $[a_i, b_i]$ des densités ρ_i soumises au contrôle $\boldsymbol{u}$ est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_i(t,x) + \partial_x f_i(\rho_i(t,x)) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times [a_i, b_i], \\ \rho_i(0,x) = \rho_i^0(x), & x \in [a_i, b_i], \\ f_i(\rho_i(t,a_i)) = \gamma_i^L(t, \rho(t), \boldsymbol{u}(t)), & t \in (0,T), \\ f_i(\rho_i(t,b_i)) = \gamma_i^R(t, \rho(t), \boldsymbol{u}(t)), & t \in (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

où les fonctions γ^L et γ^R sont les solutions du problème de programmation linéaire aux extrémités de chaque route, et ρ^0 désigne la condition initiale.

Dans cet exposé, on se focalisera sur le problème suivant : se donnant un graphe, une route principale et connaissant les flux de véhicules en tout point, comment utiliser le contrôle pour vider la route en temps fixé ? Nous modélisons cette question à l'aide d'un problème de contrôle optimal consistant à minimiser la densité au temps final sur un chemin du graphe prédéfini, c'est-à-dire minimiser la fonctionnelle :

$$J(\boldsymbol{u}) = \sum_{i \in \text{ chemin}} \int_{a_i}^{b_i} \rho_i(T, x; \boldsymbol{u})\, dx, \tag{2}$$

sous les contraintes suivantes :
- $0 \leq u_i(t) \leq 1$ qui traduit le fait que le contrôle est un taux d'acceptation de véhicule sur une route,
- $\displaystyle\sum_{i \in \text{ routes}} u_i(t) \leq N_{\max}$ qui traduit que l'on impose un nombre maximal de contrôles actifs à un instant donné (pour prendre en compte les effectifs servant à faire les barrages par exemple).

Le problème résultant étant fortement non-linéaire et de grande taille, l'obtention d'une méthode numérique efficace se heurte à diverses difficultés, relatives au temps de calcul, la présence de nombreux minima locaux et la difficulté de faire converger les algorithmes standards. Nous proposons et testons un algorithme *"optimize then discretize"* couplant une méthode classique de descente impliquant un état adjoint avec une méthode de point-fixe fondée sur les conditions d'optimalité. Nous appliquons cette méthode à des graphes complexes où l'on peut étudier des scénarios d'évacuation.

[1] M. G. et al. *Optimal control for traffic flow networks.* Journal of Optimization Theory and Applications, **126**, 2005.

[2] G. Bretti, R. Natalini, B. Piccoli. *A fluid-dynamic traffic model on road networks.* Archives of Computational Methods in Engineering, **14**, 139–172, 2007. doi :10.1007/s11831-007-9004-8.

[3] B. P. M. Garavello. *Traffic flow on networks.* American Institute of Mathematical Sciences, 2006.

Contact : `mickael.bestard@math.unistra.fr`