# Problème d'évolution généralisé

Alexandre Thorel

En collaboration avec R. Labbas et S. Maingot

CANUM 2020, Evian-les-Bains, juin 2022

# Plan de l'exposé

1 Introduction

# Plan de l'exposé


1. Introduction

2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

# 1. Introduction

On étudie une classe de problèmes en dynamique de population, structurés **en temps et en espace**. Cette dynamique décrit les variations dans le temps de la densité spatiale de population $u(t, x, y)$ dans un domaine $\Omega$ cylindrique de la forme

$$\Omega = ]a, b[ \times \omega \subset \mathbb{R}^n,$$

où $n \geqslant 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\omega$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Cette population peut être de nature variée :

- poussières (amiante, polluants, ...),
- cellules,
- insectes (abeilles, mouches, carpocapses, ...),
- animaux, etc...

# 1. Introduction

Soit $T > 0$, sur $]0, T[ \times \Omega$, on s'intéresse au modèle suivant :

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,y)}_{\substack{\text{taux de variation}\\ \text{dans le temps}}} = \underbrace{k\Delta u(t,x,y)}_{\text{diffusion locale}} - \underbrace{\Delta^2 u(t,x,y)}_{\substack{\text{diffusion à}\\ \text{longue portée}}} + \underbrace{G(u(t,x,y))}_{\substack{\text{terme de croissance}\\ \text{logistique}}} \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega \\ u(t,x,\zeta) = \Delta u(t,x,\zeta) = 0, \quad t \in [0,T],\ (x,\zeta) \in ]a,b[\times\partial\omega \\ u(t,a,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,a,y) = 0, \quad t \in [0,T],\ y \in \omega \\ u(t,b,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,b,y) = 0, \quad t \in [0,T],\ y \in \omega, \end{cases}$$

où

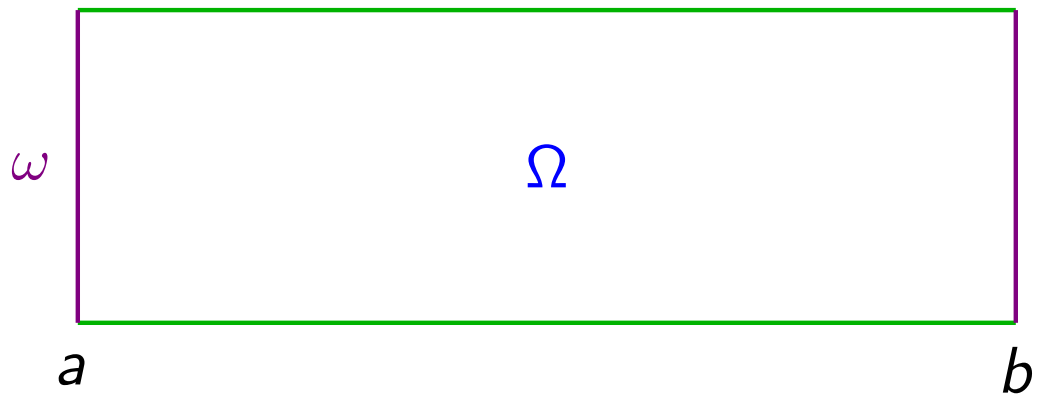
- $\Omega = ]a,b[ \times \omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,
- $k \in \mathbb{R}$.

# 1. Introduction

Pour cela, on considère le problème linéaire stationnaire associé :

$$(P_{edp})\begin{cases} -\Delta^2 u(x,y) + k\Delta u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,\zeta) = \Delta u(x,\zeta) = 0, \quad x \in ]a,b[, \ \zeta \in \partial\omega \\ u(a,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0, \quad y \in \omega \\ u(b,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(b,y) = 0, \quad y \in \omega, \end{cases}$$

où $g \in L^p(\Omega)$, avec $p \in ]1,+\infty[$ et $\Omega$ est schématisé par :



# 1. Introduction : la méthode

Puisque $\Omega = ]a, b[\times\omega$ est cylindrique, on fait une séparation des variables. On note

$$(u(x))(y) := u(x, y) \quad \text{et} \quad X := L^p(\omega), \quad p \in ]1, +\infty[.$$

On définit alors

$$\begin{cases} D(A_0) & := & \{\varphi \in W^{2,p}(\omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ A_0\varphi & := & \Delta_y\varphi, \quad \varphi \in D(A_0). \end{cases}$$

Ainsi, le problème $(P_{edp})$ devient :

$$(P_0) \begin{cases} -u^{(4)}(x) - (2A_0 - kI)u''(x) - (A_0^2 - kA_0)u(x) = g(x), \quad x \in ]a, b[ \\ u(a) = u'(a) = 0, \\ u(b) = u'(b) = 0, \end{cases}$$

où $g \in L^p(a, b; L^p(\omega))$, $p \in ]1, +\infty[$ et $k \in \mathbb{R}$.

# 1. Introduction : les hypothèses

On s'intéresse à l'étude spectrale de l'opérateur linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} D(\mathcal{A}) & = & \left\{\begin{array}{l} u \in W^{4,p}(a,b;L^p(\omega)) \cap L^p(a,b;D(A^2)) \text{ et} \\ u'' \in L^p(a,b;D(A)) : \\ u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \end{array}\right\} \\ [\mathcal{A}u](x) & = & -u^{(4)}(x) - (2A - kI)u''(x) - (A^2 - kA)u(x), \end{array}\right.$$

où $u \in D(\mathcal{A})$, $x \in ]a,b[$ et $A$ est un opérateur linéaire fermé sur $X$ avec les hypothèses :

**Hypothèses :**

- $(\mathcal{H}_1)$ $X$ est un espace de Banach complexe UMD,
- $(\mathcal{H}_2)$ $0 \in \rho(A)$,
- $(\mathcal{H}_3)$ $-A \in \mathrm{BIP}(X, \theta_A)$ avec $\theta_A \in [0, \pi/2[$,
- $(\mathcal{H}_4)$ $[k, +\infty[ \subset \rho(A)$.

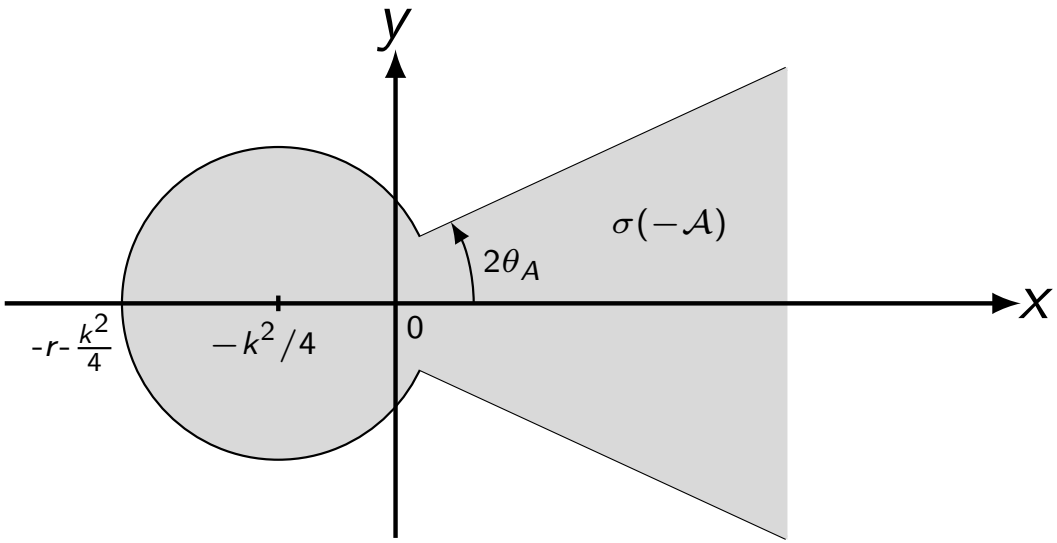
# 1. Introduction : la logique de l'étude

On cherche alors à :

- résoudre l'équation

$$(-\mathcal{A} - \lambda I)\, u = f,$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in L^p(a, b; X)$, $p \in ]1, +\infty[$, afin de déterminer où se situe le spectre de $-\mathcal{A}$ :




- estimer la norme de la solution telle que :

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|}\|f\|_{L^p(a,b;X)}.$$

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

## 2.1 Un problème plus général

Afin d'étudier les propriétés spectrales dans la section suivante, on considère le problème plus général

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P+Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), \quad x \in ]a,b[, \\ u\,(a) = \varphi_1,\ u\,(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3,\ u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \tag{1}$$

où $P$ et $Q$ sont des opérateurs linéaires vérifiant

$(H_1)$ $X$ est un espace de Banach complexe UMD,

$(H_2)$ $P$ et $Q$ sont fermés et $0 \in \rho(P) \cap \rho(Q)$,

$(H_3)$ $D(P) = D(Q)$ et $P^{-1}Q^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$,

$(H_4)$ $-P, -Q \in \mathrm{BIP}\,(X, \theta_0)$, pour un $\theta_0 \in [0, \pi[$,

$(H_5)$ $P - Q$ admet un prolongement inversible $B \in \mathcal{L}(X)$.

## 2.1. Solution particulière

**Théorème (Labbas, Maingot & A.T. (Mathematische Annalen 2021))**

*Soit* $f \in L^p(a,b;X)$ *avec* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $p \in ]1, +\infty[$. *Supposons que* $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ *et* $(H_5)$ *sont vraies. Alors, il existe une unique solution classique* $F$ *de*

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P+Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), \quad x \in ]a,b[ \\ u(a) = 0,\ u(b) = 0,\ u''(a) = 0,\ u''(b) = 0. \end{cases}$$

## 2.1. Solution particulière

**Théorème (Labbas, Maingot & A.T. (Mathematische Annalen 2021))**

*Soit* $f \in L^p(a,b;X)$ *avec* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $p \in ]1, +\infty[$. *Supposons que* $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ *et* $(H_5)$ *sont vraies. Alors, il existe une unique solution classique* $F$ *de*

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P+Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), & x \in ]a,b[ \\ u(a) = 0,\ u(b) = 0,\ u''(a) = 0,\ u''(b) = 0. \end{cases}$$

**Idées de la preuve :**

On résout, le problème du second ordre

$$\begin{cases} u''(x) - Pu(x) = v(x),\ x \in ]a,b[ \\ u(a) = 0,\ u(b) = 0, \end{cases}$$

où le second membre est l'unique solution classique de

$$\begin{cases} v''(x) - Qv(x) = f(x),\ x \in ]a,b[ \\ v(a) = 0,\ v(b) = 0. \end{cases}$$

□

## 2.1. Formule de représentation

**Proposition (Labbas, Maingot & A.T. (MAAN 2021))**

*Supposons que* $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ *et* $(H_5)$ *sont vraies. Si* $u$ *est une solution classique de l'équation du problème* (1), *alors il existe* $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, *tels que pour tout* $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 + e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4 + F(x), \quad (2)$$

*où* $M = -\sqrt{-P}$, $L = -\sqrt{-Q}$ *et* $F$ *est la solution particulière définie dans le Théorème précédent.*

## 2.1. Formule de représentation

**Proposition (Labbas, Maingot & A.T. (MAAN 2021))**

*Supposons que* $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ *et* $(H_5)$ *sont vraies. Si* $u$ *est une solution classique de l'équation du problème* (1), *alors il existe* $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, *tels que pour tout* $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_2 + e^{(x-a)L}K_3 + e^{(b-x)L}K_4 + F(x), \quad (2)$$

*où* $M = -\sqrt{-P}$, $L = -\sqrt{-Q}$ *et* $F$ *est la solution particulière définie dans le Théorème précédent.*

Idées de la preuve :

Si $u$ est une solution classique de l'équation de (1), alors $u_h := u - F$ vérifie

$$u_h^{(4)}(x) + (P + Q)u_h''(x) + PQu_h(x) = 0.$$

# 2.1. Formule de représentation

**Proposition (Labbas, Maingot & A.T. (MAAN 2021))**

*Supposons que* $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ *et* $(H_5)$ *sont vraies. Si* $u$ *est une solution classique de l'équation du problème* (1), *alors il existe* $K_i \in X$, $i = 1, 2, 3, 4$, *tels que pour tout* $x \in [a, b]$

$$u(x) = e^{(x-a)M}K_1 + e^{(b-x)M}K_2 + e^{(x-a)L}K_3 + e^{(b-x)L}K_4 + F(x), \quad (2)$$

*où* $M = -\sqrt{-P}$, $L = -\sqrt{-Q}$ *et* $F$ *est la solution particulière définie dans le Théorème précédent.*

Idées de la preuve :

Si $u$ est une solution classique de l'équation de (1), alors $u_h := u - F$ vérifie

$$u_h^{(4)}(x) + (P + Q)u_h''(x) + PQu_h(x) = 0.$$

On généralise la méthode de Krein en posant

$$v := B^{-1}L^2u_h - B^{-1}u_h'' \quad \text{et} \quad w := -B^{-1}M^2u_h + B^{-1}u_h''.$$

# 2.1. Formule de représentation

On montre que $v$ et $w$ sont solutions de 2 problèmes du second ordre

$$\begin{cases} v''(x) - M^2 v(x) = 0 \\ v(a) = C_1 \\ v(b) = C_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w''(x) - L^2 w(x) = 0 \\ w(a) = C_3 \\ w(b) = C_4, \end{cases}$$

où $x \in ]a, b[$.

## 2.1. Formule de représentation

On montre que $v$ et $w$ sont solutions de 2 problèmes du second ordre

$$\begin{cases} v''(x) - M^2 v(x) = 0 \\ v(a) = C_1 \\ v(b) = C_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w''(x) - L^2 w(x) = 0 \\ w(a) = C_3 \\ w(b) = C_4, \end{cases}$$

où $x \in ]a, b[$.

On résout ces équations opérationnelles et pour $x \in ]a, b[$, on obtient

$$v(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 \quad \text{et} \quad w(x) = e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4.$$

## 2.1. Formule de représentation

On montre que $v$ et $w$ sont solutions de 2 problèmes du second ordre

$$\begin{cases} v''(x) - M^2 v(x) = 0 \\ v(a) = C_1 \\ v(b) = C_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w''(x) - L^2 w(x) = 0 \\ w(a) = C_3 \\ w(b) = C_4, \end{cases}$$

où $x \in ]a, b[$.

On résout ces équations opérationnelles et pour $x \in ]a, b[$, on obtient

$$v(x) = e^{(x-a)M} K_1 + e^{(b-x)M} K_2 \quad \text{et} \quad w(x) = e^{(x-a)L} K_3 + e^{(b-x)L} K_4.$$

On conclut en notant que

$$v + w = B^{-1}(L^2 - M^2) u_h = u_h = u - F.$$

## 2.1 Résolution du problème

**Théorème (Labbas, Maingot & A.T. (MAAN 2021))**

*Soit* $f \in L^p(a,b;X)$ *avec* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $p \in ]1,+\infty[$. *Supposons que* $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ *et* $(H_5)$ *soient vraies et que les opérateurs suivants sont inversibles :*

$$\begin{cases} U &:= I - e^{(b-a)(L+M)} - B^{-1}(L+M)^2\left(e^{(b-a)M} - e^{(b-a)L}\right) \\ V &:= I - e^{(b-a)(L+M)} + B^{-1}(L+M)^2\left(e^{(b-a)M} - e^{(b-a)L}\right). \end{cases}$$

*Alors, il existe une unique solution classique de*

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + (P+Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), \quad x \in ]a,b[, \\ u(a) = \varphi_1, \ u(b) = \varphi_2, \\ u'(a) = \varphi_3, \ u'(b) = \varphi_4, \end{cases} \tag{3}$$

*si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \quad \text{et} \quad \varphi_3, \varphi_4 \in (D(P), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.$$

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

## 2.2 Étude de l'ensemble résolvant : la méthode

On va maintenant s'intéresser à l'équation spectrale

$$u^{(4)}(x) + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA - \lambda I)u(x) = f(x), \quad x \in ]a, b[,$$

muni des mêmes conditions aux bords que précédemment.
Soit $\lambda \in -\frac{k^2}{4} + \left(\mathbb{C} \setminus \overline{S_{2\theta_A}}\right)$. On pose

$$P_\lambda = A - \frac{k}{2}I + i\sqrt{-\lambda - \frac{k^2}{4}I} \quad \text{and} \quad Q_\lambda = A - \frac{k}{2}I - i\sqrt{-\lambda - \frac{k^2}{4}I}.$$

Ainsi, l'équation spectrale précédente s'écrit

$$u^{(4)}(x) + (P_\lambda + Q_\lambda)u''(x) + P_\lambda Q_\lambda u(x) = f(x), \quad x \in ]a, b[.$$

Notons que si $A$ vérifie les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$, alors les hypothèses $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)$ et $(H_5)$ sont vérifiées aussi.

## 2.2 Étude de l'ensemble résolvant

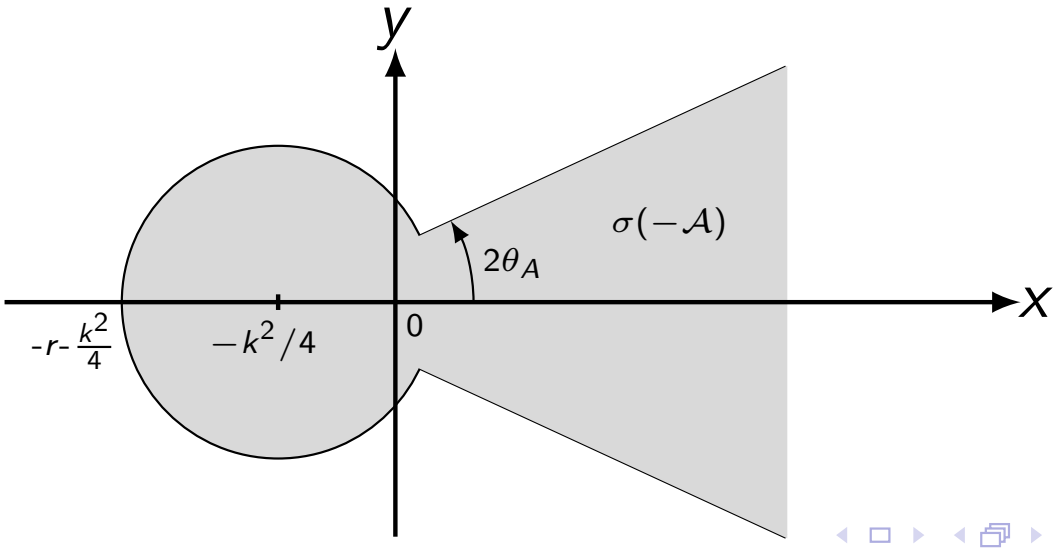
On note alors

$$L_\lambda = -\sqrt{-Q_\lambda}, \quad M_\lambda = -\sqrt{-P_\lambda} \quad \text{et} \quad B_\lambda = 2i\sqrt{-\lambda - \frac{k^2}{4}}I \in \mathcal{L}(X).$$

Afin d'utiliser le Théorème d'existence et d'unicité de la section 2.1, il faut que

$$\begin{cases} U_\lambda & := & I - e^{(b-a)(L_\lambda+M_\lambda)} - B_\lambda^{-1}(L_\lambda+M_\lambda)^2\left(e^{(b-a)M_\lambda} - e^{(b-a)L_\lambda}\right) \\ V_\lambda & := & I - e^{(b-a)(L_\lambda+M_\lambda)} + B_\lambda^{-1}(L_\lambda+M_\lambda)^2\left(e^{(b-a)M_\lambda} - e^{(b-a)L_\lambda}\right), \end{cases}$$

soient inversibles. D'où $\lambda \in -\frac{k^2}{4} + \left(\mathbb{C} \setminus \left(\overline{B(0,r)} \cup \overline{S_{2\theta_A}}\right)\right)$, avec $r > 0$.



# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

# 2.3 Estimation de la résolvante

## Lemme

*Soit* $f \in L^p(a,b;X)$. *Supposons que* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *soient vraies. Alors, pour tout* $\mu \in \overline{S_\varphi} \subset \rho(-A)$, $\varphi \in ]0, \pi - \theta_A[$ *et tout* $x \in [a,b]$, *on a*

1. $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset \rho(\sqrt{A+\mu I})$, *pour tout* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{\|(\sqrt{A+\mu I})^{-1}\|}\right)$.
2. *Il existe* $M > 0$ *(indépendant de* $\mu$ *et* $f$*) tel que*

$$\left(\int_a^b \left\| \int_a^x e^{-(x-s)\sqrt{A+\mu I}} f(s)\, ds \right\|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{M}{\sqrt{1+|\mu|}} \|f\|_{L^p(a,b;X)},$$

*et*

$$\left(\int_a^b \left\| \int_x^b e^{-(s-x)\sqrt{A+\mu I}} f(s)\, ds \right\|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \frac{M}{\sqrt{1+|\mu|}} \|f\|_{L^p(a,b;X)}.$$

# 2.3 Estimation de la résolvante

## Lemme (Labbas, Maingot & A.T. (MAAN 2021))

*Soit* $f \in L^p(a,b;X)$. *Supposons que* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *soient vraies. Alors, pour tout* $\mu, \eta \in \overline{S_\varphi} \subset \rho(-A)$, $\varphi \in ]0, \pi - \theta_A[$ *et tout* $x \in [a,b]$, *il existe* $C > 0$ *(indépendant de* $\eta, \mu$ *et* $f$*), tel que*

1. $$\left\| e^{-(\cdot - a)\sqrt{-A+\eta I}} \int_a^b e^{-(s-a)\sqrt{-A+\mu I}} f(s)\, ds \right\|_{L^p(a,b;X)} \leqslant \left( \frac{C}{\sqrt{1+|\mu|}} + \frac{C}{\sqrt{1+|\eta|}} \right) \|f\|_{L^p(a,b;X)},$$

2. $$\left\| e^{-(\cdot - a)\sqrt{-A+\eta I}} \int_a^b e^{-(b-s)\sqrt{-A+\mu I}} f(s)\, ds \right\|_{L^p(a,b;X)} \leqslant \left( \frac{C}{\sqrt{1+|\mu|}} + \frac{C}{\sqrt{1+|\eta|}} \right) \|f\|_{L^p(a,b;X)},$$

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

# 3. Les résultats

**Théorème (Labbas, Maingot & A.T. (Mathematische Annalen 2021))**

*On suppose* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$ *et* $(\mathcal{H}_4)$. *Alors, on a*

$$\begin{cases} -\mathcal{A} + \dfrac{k^2}{4} I + rI \in Sect\left(\dfrac{\pi}{2}\right), & si \;\; 2\theta_A \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \\ -\mathcal{A} + \dfrac{k^2}{4} I + rI \in Sect\left(2\theta_A\right), & si \;\; 2\theta_A \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[, \end{cases}$$

*où* $r > 0$ *est assez grand. Il existe* $r' > r$ *et* $\theta_0 > 0$, *tels que*

$$\begin{cases} -\mathcal{A} + \dfrac{k^2}{4} I + r'I \in Sect\left(2\theta_A\right), & si \;\; 2\theta_A \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \\ -\mathcal{A} + \dfrac{k^2}{4} I + r'I \in Sect\left(\theta_0\right), & si \;\; 2\theta_A = 0. \end{cases}$$

*Si de plus,* $\theta_A < \pi/4$, *alors l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique fortement continue* $\left(e^{t\mathcal{A}}\right)_{t \geqslant 0}$.

# Plan de l'exposé


1. Introduction
2. L'étude spectrale de l'opérateur
   - Inversibilité de l'opérateur
   - Étude de l'ensemble résolvant
   - Estimation de la résolvante
3. Les résultats de génération de semi-groupes
4. Perspectives

# 5. Perspectives

- Montrer que $-\mathcal{A} \in \mathrm{BIP}\,(X, \theta_{\mathcal{A}})$, où $\theta_{\mathcal{A}} \in \,]2\theta_A, \pi[$.
- Étudier le problème (linéaire) de Cauchy abstrait associé et obtenir la régularité maximale $L^p$.
- Étudier le problème non linéaire par méthode du point fixe.

**Merci pour votre attention !**