Identification par méthode inverse des propriétés optiques d'un milieu diffusant sous lumière polarisée
Application à l'impact du brouillard sur la perception artificielle

Frédéric Bernardin [1] Ali Krayem [1,2] Arnaud Münch[2]

[1]CEREMA
Centre d'études et d'expertise sur les risques, l'environnement, la mobilité et l'aménagement
Clermont-Ferrand

[2]Laboratoire de mathématiques Blaise Pascal
Université Clermont Auvergne

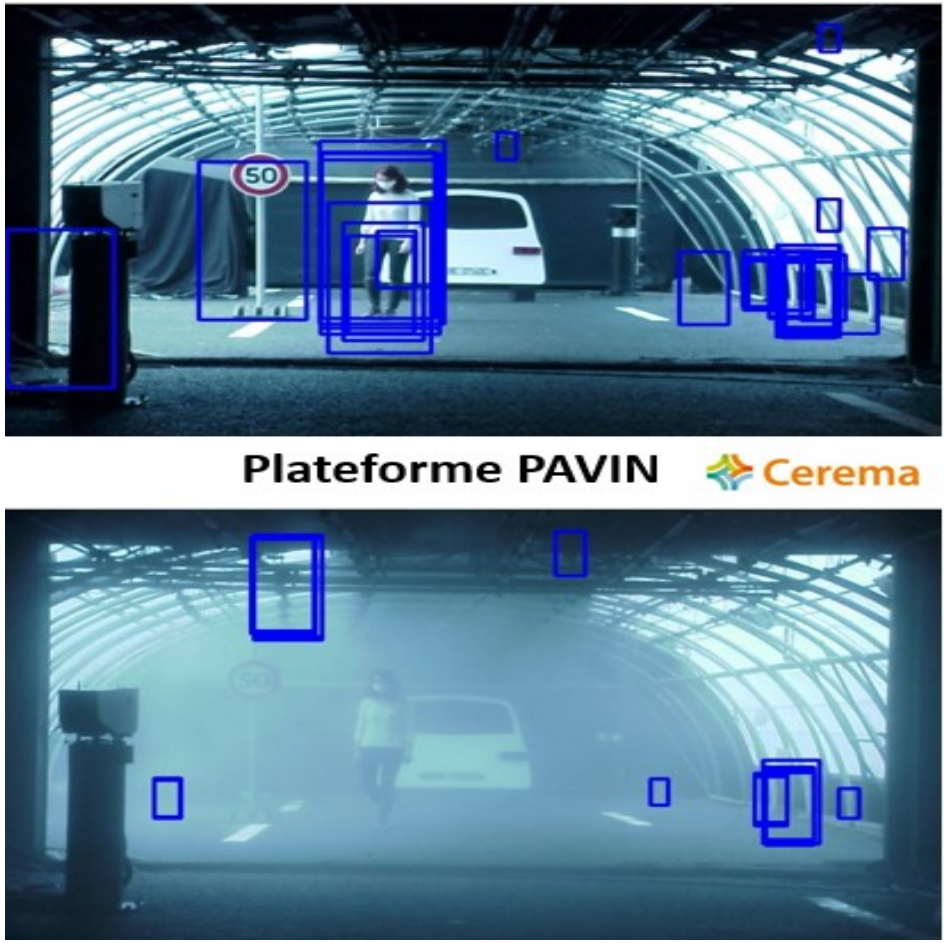
Congrès CANUM 2022 - Évian-les-Bains

Problématique

Les conditions météorologiques dégradées, dont le brouillard, limitent les performances des capteurs optiques utilisés dans différents domaines d'application.

* Besoin de tester les capteurs physiquement.

* Tester aussi via des simulations numériques (physico-réaliste).



La propagation des ondes électromagnétiques est régie par les phénomènes de diffusion et d'absorption des photons au contact des gouttelettes de brouillard. La distribution N des tailles de ces gouttes est un paramètre clé des modèles de propagation.

Objectifs

1. Modéliser et simuler la propagation des rayonnements électromagnétiques dans les milieux diffusants (brouillard).

2. Identifier la distribution granulométrique de brouillard qui nous permet de reconstruire les coefficients de l'équation de transfert radiatif stationnaire en utilisant la théorie de Mie[a].

[a] **H. Hulst and H. van de Hulst, Light scattering by small particles, Dover Books on Physics, Dover Publications, 1957**

Équation de transfert radiatif 1D

Soit $X := (0, H) \times (-1, 1)$, la luminance L_λ est régie par l'équation de transfert radiatif suivant

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x}(x, \mu, N) + \left(\sigma^\lambda_{sca}(N) + \sigma^\lambda_{abs}(N)\right) L_\lambda(x, \mu, N) = \mathcal{K} L_\lambda(x, \mu, N) + q(x, \mu), & (x, \mu) \in X \\ L_\lambda(0, \mu, N) = L^0_+(\mu) & \mu > 0 \\ L_\lambda(H, \mu, N) = L^H_-(\mu) & \mu < 0 \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{K} L_\lambda(x, \mu, N) = \frac{\sigma_{sca(N)}}{2} \int_{-1}^{1} \Phi_\lambda(\mu, \mu', N) L_\lambda\left(x, \mu', N\right) d\mu'$$

$$\forall\, \mu \in [-1, 1]\,, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \Phi(\mu, \mu', N)\, d\mu' = 1$$

Théorème [a]

[a] G. Allaire and X. Blanc and B. Després and F. Golse, Transport et diffusion, Ecole Polytechnique, 2019

Pour tout $\sigma_{abs} > 0$, $X = (0, H) \times (-1, 1)$, $q \in L^\infty(X)$ et supposons que

$$\Phi_\lambda \in C_b((-1, 1) \times (-1, 1)), \quad L^0_+ \in L^\infty((0, 1)),\ L^H_- \in L^\infty((-1, 0))$$

alors l'équation de transfert radiatif admet une solution unique dans $C_b(X)$, qui vérifie

$$\|L_\lambda\|_{L^\infty(X)} \leq \begin{cases} \frac{1}{\sigma^\lambda_{abs}} \max(\sigma^\lambda_{abs} \|L^0_+\|_{L^\infty((0,1])}, \|q\|_{L^\infty(X)}) & \text{si} \quad \mu > 0 \\ \frac{1}{\sigma^\lambda_{abs}} \max(\sigma^\lambda_{abs} \|L^H_-\|_{L^\infty([-1,0))}, \|q\|_{L^\infty(X)}) & \text{si} \quad \mu < 0 \end{cases}$$

Théorie de Lorenz-Mie [1]

Les coefficients d'extinction, de diffusion et d'absorption σ_{ext}, σ_{sca}, σ_{abs} et la fonction de phase ϕ ont pour expression :

$$\sigma_{ext}^{\lambda}(N) = \pi \int_0^{+\infty} Q_{ext}(\lambda, r)\, r^2\, N(r)\, dr \tag{1}$$

$$\sigma_{sca}^{\lambda}(N) = \pi \int_0^{+\infty} Q_{sca}(\lambda, r)\, r^2\, N(r)\, dr \tag{2}$$

$$\sigma_{abs}^{\lambda}(N) = \pi \int_0^{+\infty} Q_{abs}(\lambda, r)\, r^2\, N(r)\, dr \tag{3}$$

$$\sigma_{sca}^{\lambda}\, \phi^{\lambda}(\mu, N) = \pi \int_0^{+\infty} \psi^{\lambda}(r, \mu)\, r^2\, N(r)\, dr \tag{4}$$

où

$$\psi^{\lambda}(r, \mu) = \frac{\lambda^2}{2\,\pi^2\, r^2\, Q_{sca}(\lambda, r)} \left(|S_1(\mu)|^2 + |S_2(\mu)|^2\right)$$

Q_{ext}: Section efficace d'extinction.

Q_{sca}: Section efficace de diffusion.

Q_{abs}: Section efficace d'absorption.

S_1, S_2 les fonctions d'amplitude de diffusion.

[1] **H. Hulst and H. van de Hulst, Light scattering by small particles, Dover Books on Physics, Dover Publications, 1957**

Problème de contrôle optimal

Soit

$$\mathcal{H} = \left\{ N \in L^2(\mathbb{R}^+), \int_{\mathbb{R}^+} r^2\, N^2(r) dr < +\infty \right\} \text{ avec } (N, \bar{N})_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^+} r^2\, N(r)\, \bar{N}(r)\, dr$$

Problème de minimisation

$$\inf_{N \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^+)} J_\varepsilon(N)$$

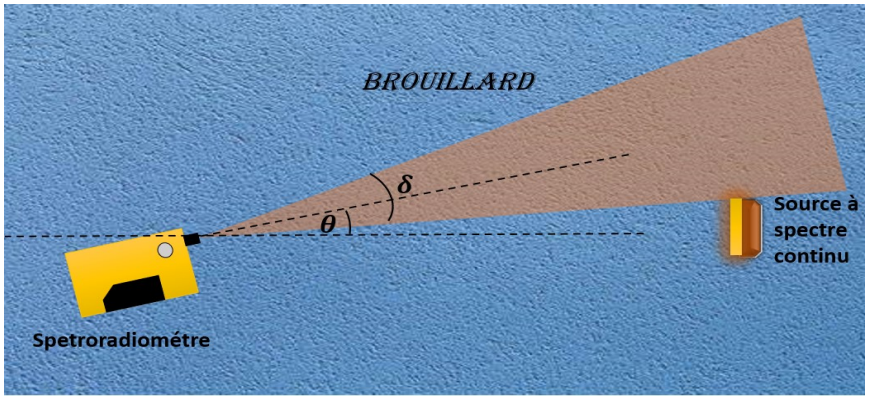
$$J_\varepsilon(N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \sum_{l=1}^{G} \left(\int_{\cos(\theta+\delta/2)}^{\cos(\theta)} \mu\, L_{\lambda_l}(x_i, \mu, N)\, d\mu - M_{\lambda_l}^{obs}(x_i) \right)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|N\|^2_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)} \qquad \varepsilon \geq 0.$$

S: nombre des points de mesure
G: nombre des longueurs d'onde

avec

$$M_\lambda^{obs}(x) = \int_{\cos(\theta+\delta/2)}^{\cos(\theta)} \mu\, \bar{L}_\lambda(x, \mu, N^{obs})\, d\mu,$$

où $\bar{L}_\lambda$ désigne la luminance expérimentale régnant dans le milieu et θ la direction du spectroradiomètre.



Travaux similaires [2]

Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{S} \subset \mathbb{S}^2$

$$\begin{cases} u.\nabla_x L_\lambda(x,u) + (\sigma_{abs}(x) + \sigma_{sca}(x))\, L_\lambda(x,u) = (\mathcal{K}L)(x,u) + q(x,u), & (x,u) \in \mathcal{R} \times \mathcal{S} \\ L_\lambda(x,u) = L_b^-(x,u) & (x,u) \in \Gamma_- = \partial\mathcal{R} \times \mathcal{S} \end{cases}$$

$$(\mathcal{K}L)(x,u) = \sigma_{sca}(x) \int_{\mathcal{S}} \Phi(x,u,u')\, L_\lambda(x,u')\, du'$$

$*$ Dans ce travail, les coefficients σ_{abs} et σ_{sca} sont approchés par inversion dans un cas isotrope (fonction de phase $\Phi \equiv 1$)

$*$ **Problème de minimisation de Tikhonov**: Pour $\alpha \geq 0$

$$\min_{(\sigma_{abs},\sigma_{sca}) \in D} \|BL(\sigma_{abs},\sigma_{sca}) - M\|^q_{L^q(\partial\mathcal{R})} + \alpha\|\sigma_{sca} - \sigma^0_{sca}\|^p_{L^p(\mathcal{R})} + \alpha\|\sigma_{abs} - \sigma^0_{abs}\|^p_{L^p(\mathcal{R})}$$

avec $BL(\sigma_{abs},\sigma_{sca}) = \int_{u\cdot n(x)>0} L(x,u)u \cdot n(x)\, du$ et $D := \{(\sigma_{abs},\sigma_{sca}) \in (L^p(\mathcal{R}))^2 : (2) - (3)\,\text{sont verifiée}\}$

$*$ La mesure M dépend de la condition aux bords $L^-_{b,j}$ et la fonction source q.

$*$ **Algorithme de minimisation (Gauss-Newton):** Soit $x = (\sigma_{abs},\sigma_{sca})$ et $F(x) = BS(\sigma_{abs},\sigma_{sca})$

$\hat{x}_{n+1} = x_n + (F'(x_n)^\star F'(x_n) + \alpha_n I)^{-1}[F'(x_n)^\star(M - F(x_n)) + \alpha_n(x_0 - x_n)]$

$x_{n+1} = P_D(\hat{x}_{n+1})$ avec P_D la projection métrique sur D.

$*$ L'équation de transfert radiatif est approchée par la méthode des éléments finis .

[2] **Herbert Egger et Matthias Schlottbom, Numerical methods for parameter identification in stationary radiative transfer, 2014**

Travaux similaires[3]

Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, et supposons que $q(x, u) = 0 \, \forall x \in \partial\mathcal{R}$, $u \in \mathbb{S}^{n-1}$

$*$ Pour reconstruire le coefficient de diffusion σ_{sca}, ils introduisent le problème de minimisation suivante:

$$J(\sigma_{sca}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \|F_i(\sigma_{sca}) - M_i\|^2_{L^2(\partial\mathcal{R})} + \frac{\alpha}{2}\|\sigma_{sca} - \sigma^0_{sca}\|^2_{L^2(\mathcal{R})}, \; s : \text{nombre d'appareils laser}$$

$*$ M est calculé en basant sur $L^-_{b,i}$, $1 \leq i \leq s$ avec

$$M_i = \int_{u\cdot n(x)>0} L_i(x, u) u \cdot n \, d\mu(u), \;\; M_i \in \mathbb{R}^d, \;\; d : \text{nombre des détecteurs}$$

$*$ **Algorithme de minimisation (Levenberg-Marquardt):** Pour $k = 0, ..K$, avec σ^0_{sca} donnée

$$\left(\sum_{i=1}^{s} F_i'(\sigma^k_{sca})^\star F_i'(\sigma^k_{sca}) + \alpha_n I\right)(\sigma^{k+1}_{sca} - \sigma^k_{sca}) = \sum_{i=1}^{s}[F_i'(\sigma^k_{sca})^\star(F_i(\sigma^k_{sca}) - M_i)]$$

$*$ la méthode des différences finies en discrétisation spatiale, et la méthode des éléments finis ou approximation S_N en discrétisation angulaire.

Remarques

$*$ Notre approche est de reconstruire la distribution N et en utilisant la théorie de Mie on calcule les paramètres optiques en dimension 1.
$*$ La mesure M dans notre cas dépend des point spatiaux et des longueurs d'onde.

[3] **Bo Bi, Bo Han, Weimin Han, Jinping Tang,et Li Li, Image Reconstruction for Diffuse Optical Tomography Based on Radiative Transfer Equation, 2014**

Expression du gradient de la fonction coût J_ε

Proposition

La fonction J_ε est continue, différentiable, strictement convexe de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathbb{R}$. Son gradient est donné par:

$$\begin{aligned}\nabla J_\varepsilon(N) = &- \pi \sum_{l=1}^{G} Q_{ext}(\lambda_l, r) \int_{-1}^{1}\int_{0}^{H} p_{\lambda_l}(x,\mu,N)\, L_{\lambda_l}(x,\mu,N)\, dx\, d\mu \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{G}\left\{\int_{\mu=-1}^{1}\int_{0}^{H} p_{\lambda_l}(x,\mu,N)\left(\int_{\mu'=-1}^{1} L_{\lambda_l}(x,\mu',N)\left(\int_{0}^{2\pi}\psi^{\lambda_l}(r,\mu_0)\, dw\right) d\mu'\right) dx\, d\mu\right\} \\ &+ \varepsilon N\end{aligned} \tag{5}$$

En fonction du problème adjoint défini par

$$\begin{cases} -\mu\dfrac{\partial p_\lambda}{\partial x}(x,\mu,N) + \left(\sigma^\lambda_{sca}(N) + \sigma^\lambda_{abs}(N)\right) p_\lambda(x,\mu,N) = \mathcal{K}L_\lambda(x,\mu,N) + q_\lambda(x,\mu), \quad (x,\mu)\in X \\ q_\lambda(x,\mu,N) = \displaystyle\sum_{i=1}^{S}\left(\int_{\cos(\theta+\delta/2)}^{\cos(\theta)} \mu\, L_\lambda(x_i,\mu,N)\, d\mu - M_\lambda(x_i)\right) \mathbb{1}_{(\cos(\theta+\delta/2),\cos\theta)}(\mu)\, \delta_{x_i}(x) \\ p_\lambda(0,\mu,N) = 0 \qquad \mu < 0 \\ p_\lambda(H,\mu,N) = 0 \qquad \mu > 0 \end{cases}$$

où

$$\psi^\lambda(r,\mu_0) = \frac{\lambda^2}{2\,\pi^2\, r^2\, Q_{sca}(\lambda,r)}\left(|S_1(\mu_0)|^2 + |S_2(\mu_0)|^2\right) \quad , \quad \mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(w)$$

Algorithme de Barzilai-Borwein [a]

[a] J. BARZILAI, J. M. BORWEIN, Two-Point Step Size Gradient Methods, IMA Journal of Numerical Analysis, 1988

$$\begin{cases} N_0, N_1 \quad \text{donnée}, N_0 \neq N_1 \\ g_0 = \nabla J_\varepsilon(N_0) \\ g_1 = \nabla J_\varepsilon(N_1) \end{cases}$$

et pour tout $n \geq 1$

$$\begin{cases} \Delta N_{n-1} = N_n - N_{n-1} \\ \Delta g_{n-1} = g_n - g_{n-1} \\ \alpha_n = \arg\min_\alpha \frac{1}{2} \|\Delta N_{n-1} - \alpha\, \Delta g_{n-1}\|^2_{\mathcal{H}(\mathbb{R})} \implies \alpha_n = \dfrac{(\Delta N_{n-1}, \Delta g_{n-1})_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}{(\Delta g_{n-1}, \Delta g_{n-1})_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}} \\ N_{n+1} = N_n - \alpha_n\, g_n \\ g_{n+1} = \nabla J_\varepsilon(N_{n+1}) \end{cases}$$

Illustrations numériques

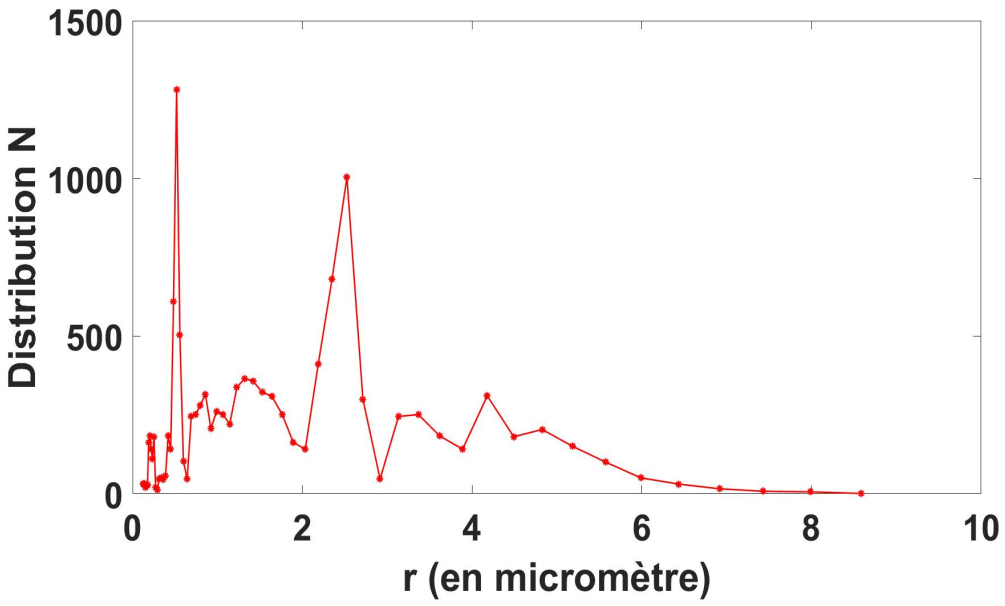
On fixe les données suivantes pour toutes les simulations:

* On travaille avec des mesure synthétiques.
* On travaille dans le domaine $X = (0,1) \times (-1,1)$.
* Le problème direct et le problème adjoint sont approchés par le schéma décentré amont[4].
* On prend $L_+^0(\mu) = 1$ et $L_-^H(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in (-1,1)$.

* On initialise l'algorithme de minimisation par les deux vecteurs $N_0 = (1,...,1)$ et $N_1 = (3,...,3)$

* Pour montrer la convergence de l'algorithme, on calcule à chaque itération n la norme relative de la fonction contrôle

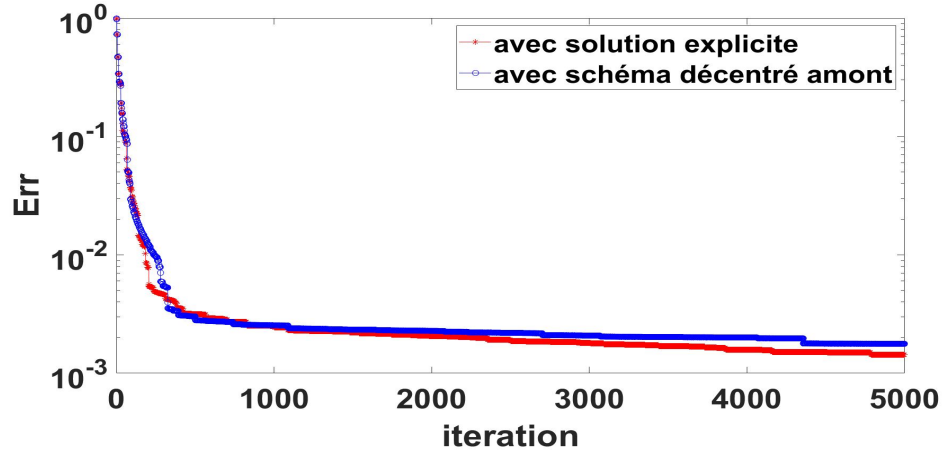
$$\mathrm{Err(n)} = \frac{(N_n - N^\star, N_n - N^\star)_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}{(N^\star, N^\star)_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}$$

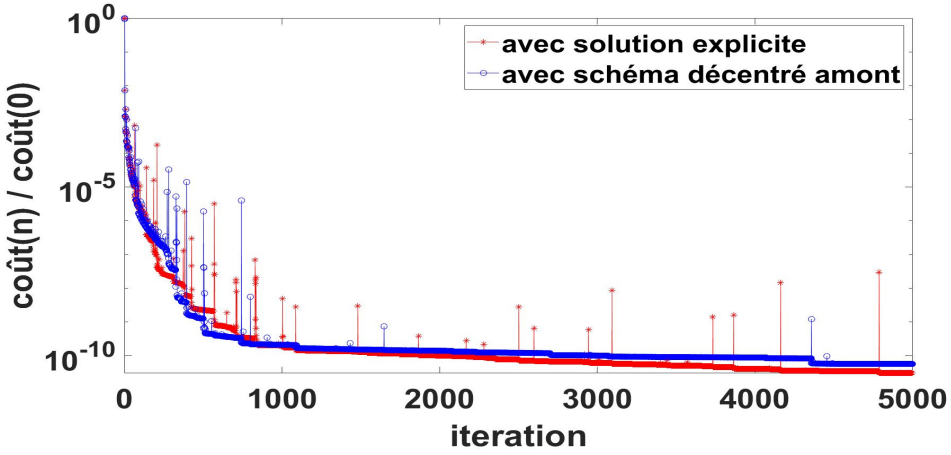


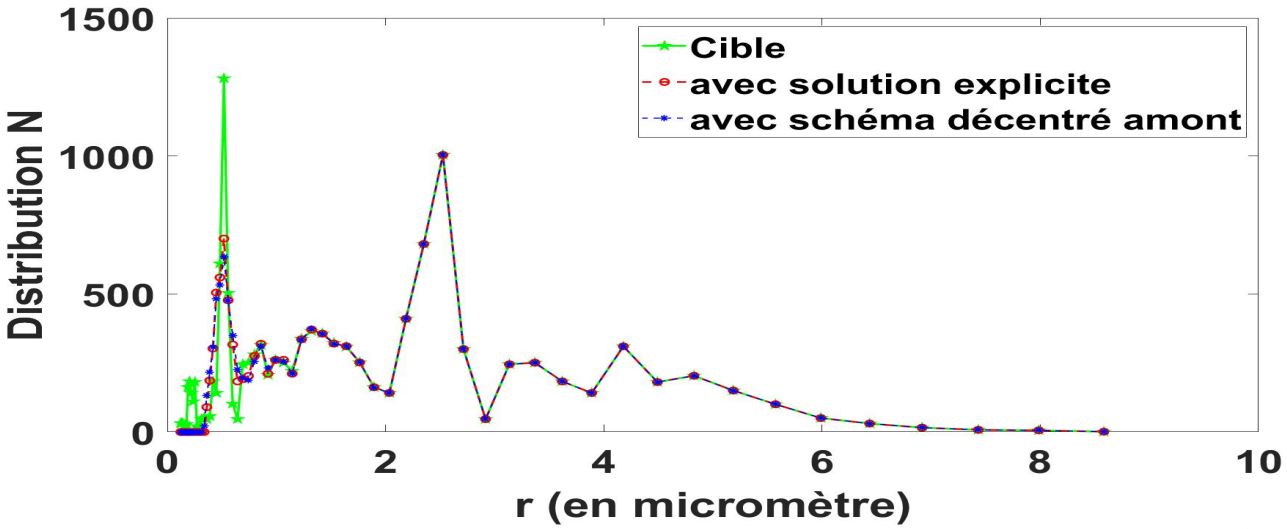
[4] G. Allaire and X. Blanc and B. Després and F. Golse, Transport et diffusion, Ecole Polytechnique, 2019

Simulations : cas sans collision $(\mathcal{KL}) \equiv 0$ (Comparaison entre solution explicite et solution numérique)

$*$ Dans ce cas, le problème direct et le problème adjoint admet une solution explicite.
On effectue des mesures en $x = 0.5$ avec 100 longueurs d'onde entre $0.3\mu m$ et $2.5\mu m$ et pour $\theta = 0°$, $\delta = 60°$, $\varepsilon = 0$.







$*$ $\mathrm{Err}^{expl}(5000) = 1.426 \times 10^{-3}$

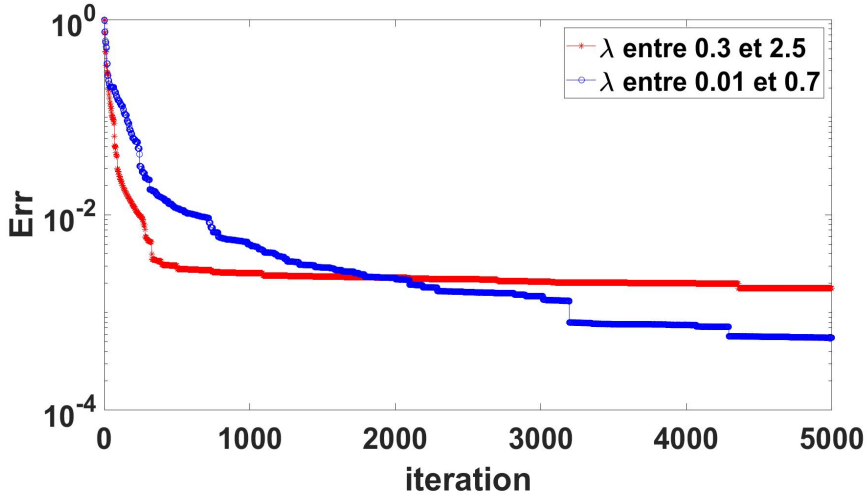
$*$ $\mathrm{Err}^{num}(5000) = 1.771 \times 10^{-3}$

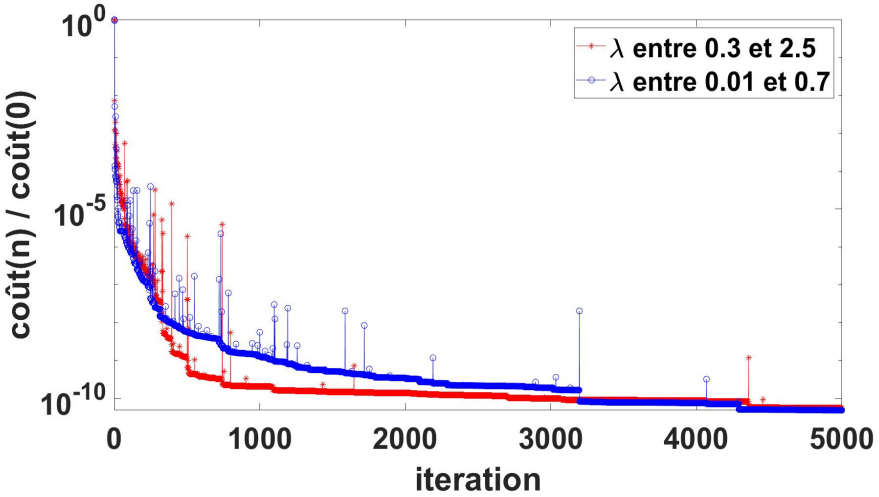
$*$ $\dfrac{\mathrm{coût}^{expl}(5000)}{\mathrm{coût}^{expl}(0)} = 2.972 \times 10^{-11}$

$*$ $\dfrac{\mathrm{coût}^{num}(5000)}{\mathrm{coût}^{num}(0)} = 5.597 \times 10^{-11}$

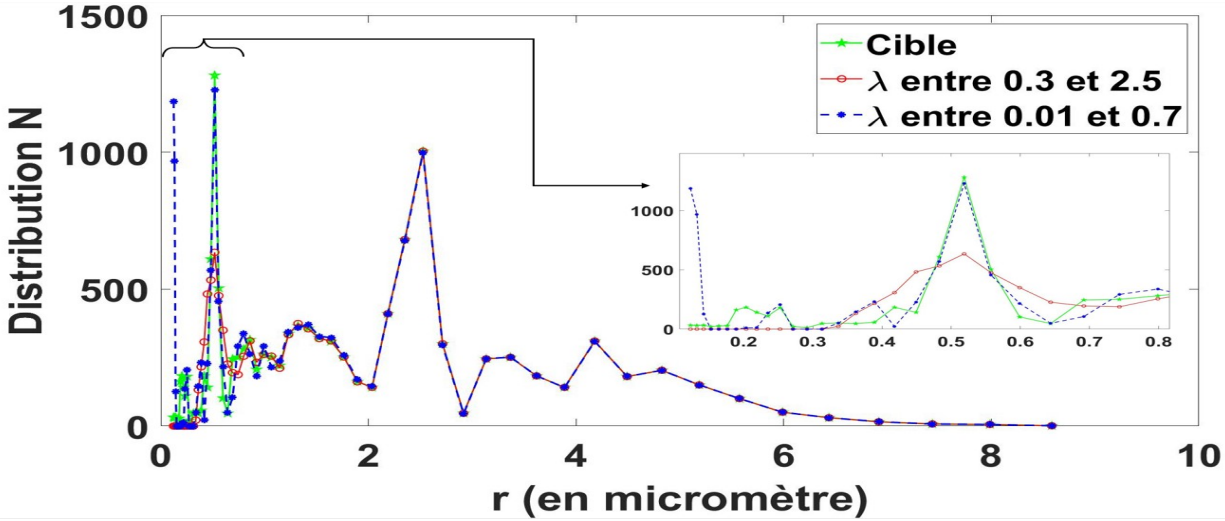
Simulations : cas sans collision $(\mathcal{KL}) \equiv 0$ (l'effet des longueurs d'onde)

On effectue des mesures en $x = 0.5$ avec 100 longueurs d'onde entre $0.3\mu m$ et $2.5\mu m$ (N_1 sont distribution) et des autres mesures avec 100 longueurs d'onde entre $0.01\mu m$ et $0.7\mu m$ (N_2 sont distribution). $\theta = 0°$, $\delta = 60°$, $\varepsilon = 0$.





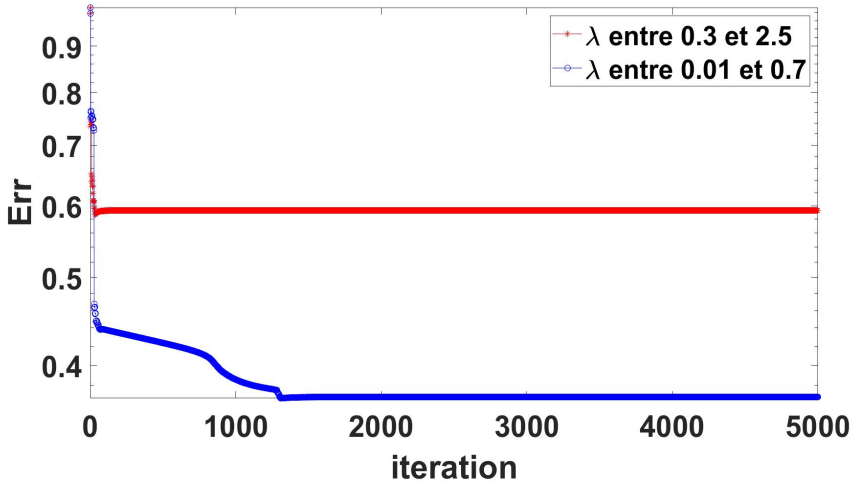
L'erreur relative (à gauche) et le coût relatif (à droite) en fonction des itérations (schéma décentré amont)

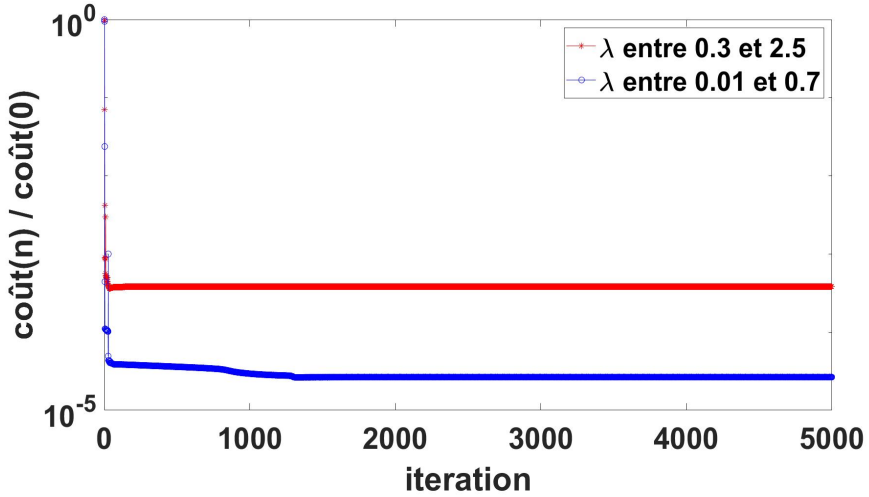


* $\mathrm{Err}^{N_1}(5000) = 1.771 \times 10^{-3}$
* $\mathrm{Err}^{N_2}(5000) = 5.537 \times 10^{-4}$
* $\dfrac{\text{coût}^{N_1}(5000)}{\text{coût}^{N_1}(0)} = 5.597 \times 10^{-11}$
* $\dfrac{\text{coût}^{N_2}(5000)}{\text{coût}^{N_2}(0)} = 4.860 \times 10^{-11}$

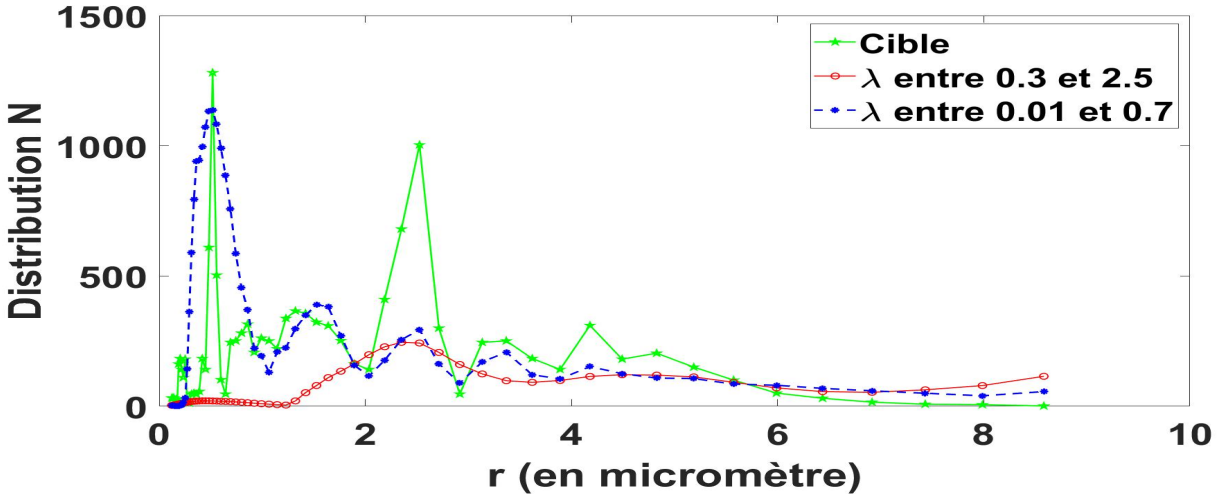
Simulations: cas avec collision (cas isotropes i.e. fonction de phase $\Phi \equiv 1$)

On effectue des mesures en $x = 0.5$ avec 100 longueurs d'onde entre $0.3\mu m$ et $2.5\mu m$ (N_1 sont distribution) et des autres mesures avec 100 longueurs d'onde entre $0.01\mu m$ et $0.7\mu m$ (N_2 sont distribution). $\theta = 0°$, $\delta = 60°$, $\varepsilon = 0$.





L'erreur relative (à gauche) et le coût relatif (à droite) en fonction des itérations (schéma décentré amont)

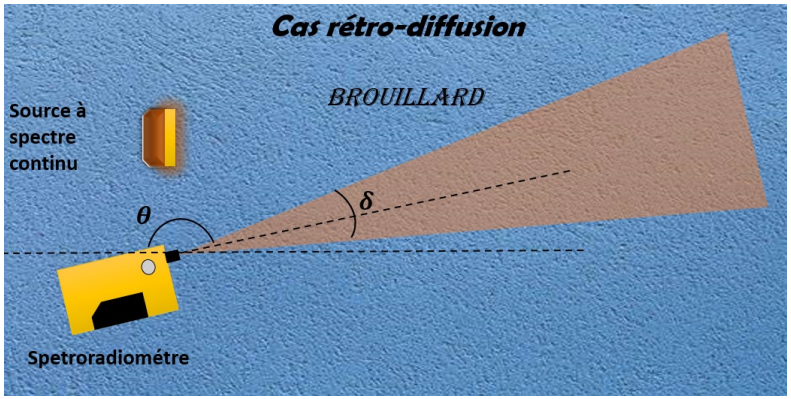


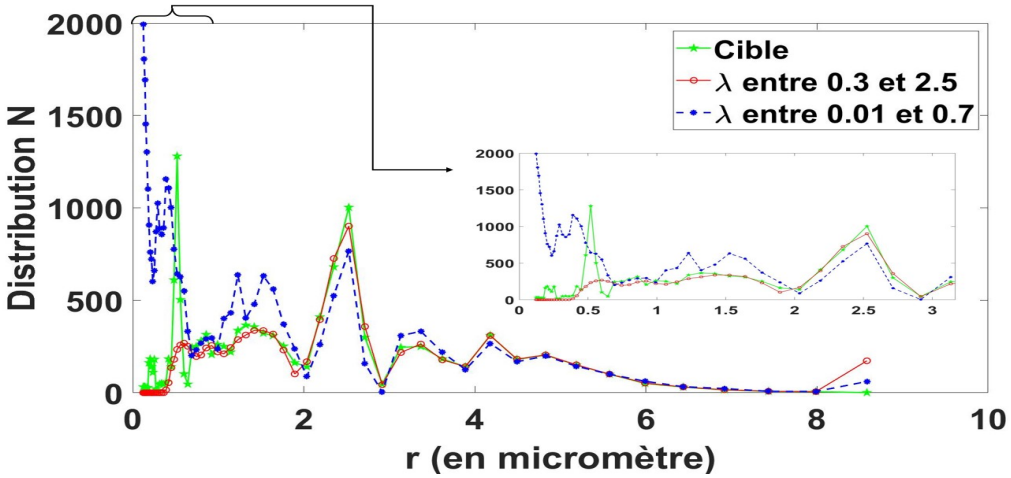
* $\mathrm{Err}^{N_1}(5000) = 5.927 \times 10^{-1}$
* $\mathrm{Err}^{N_2}(5000) = 3.691 \times 10^{-1}$
* $\dfrac{\mathrm{coût}^{N_1}(5000)}{\mathrm{coût}^{N_1}(0)} = 3.796 \times 10^{-4}$
* $\dfrac{\mathrm{coût}^{N_2}(5000)}{\mathrm{coût}^{N_2}(0)} = 2.653 \times 10^{-5}$

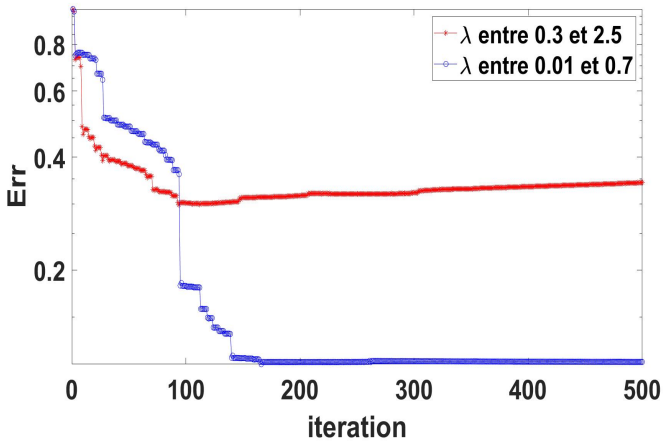
Simulations: cas avec collision (isotropes i.e. fonction de phase $\Phi \equiv 1$) Cas rétro-diffusion (mesure au bord)

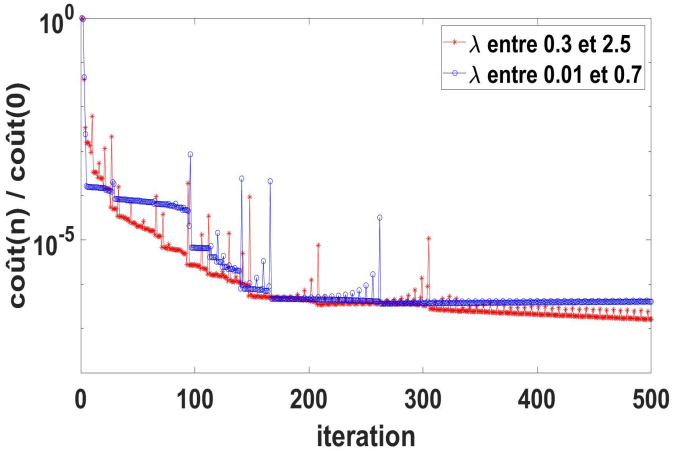
N_1 pour 100 longueurs d'onde entre $0.3\mu m$ et $2.5\mu m$ et N_2 pour 100 longueurs d'onde entre $0.01\mu m$ et $0.7\mu m$.

$*$ Mesure en $x = 0$ avec $\theta = 120°$, $\delta = 60°$ et $\varepsilon = 0$.









$*$ $\mathrm{Err}^{N_1}(500) = 3.416 \times 10^{-1}$

$*$ $\mathrm{Err}^{N_2}(500) = 1.136 \times 10^{-1}$

$*$ $\dfrac{\text{coût}^{N_1}(500)}{\text{coût}^{N_1}(0)} = 1.639 \times 10^{-7}$

$*$ $\dfrac{\text{coût}^{N_2}(500)}{\text{coût}^{N_2}(0)} = 4.099 \times 10^{-7}$

L'erreur relative (à gauche) et le coût relatif (à droite) en fonction des itérations.

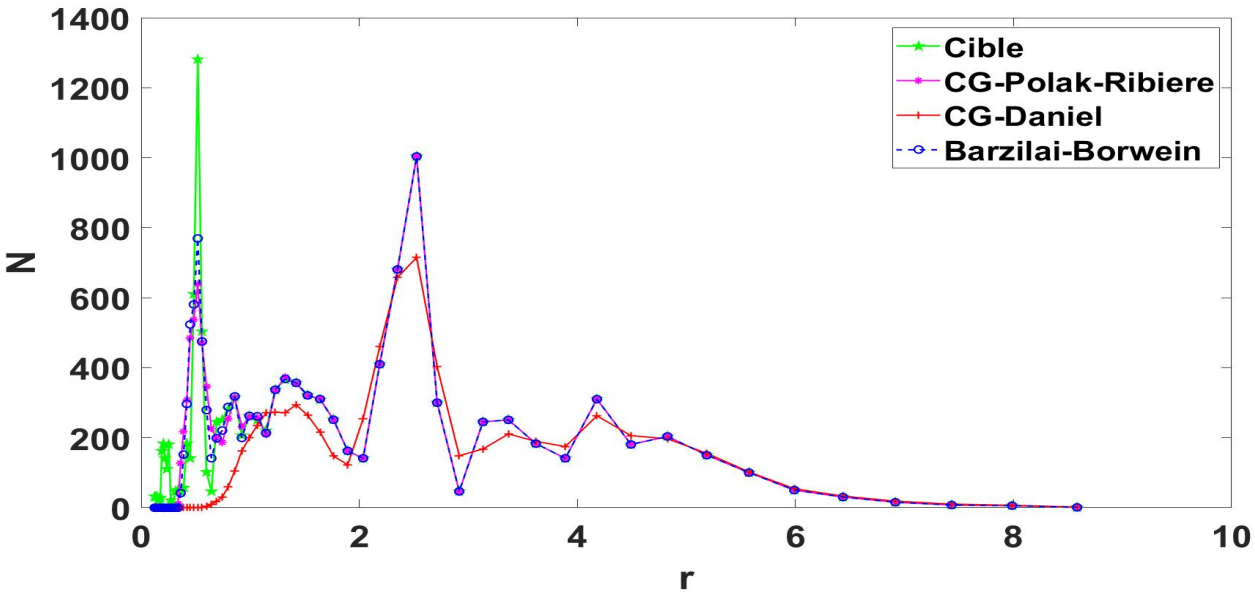
Comparaisons avec d'autres algorithmes de minimisation[5]

On considère la méthode du gradient conjugué:

N_0 donnée, $g_0 = \nabla J_\varepsilon(N_0)$ et $d_0 = g_0$, et pour tout $n \geq 0$

$$\begin{cases} t_n = \arg\min\limits_{t \in \mathbb{R}^+} J_\varepsilon(N_n - t\, d_n), \qquad N_{n+1} = N_n - t_n d_n, \qquad g_{n+1} = \nabla J_\varepsilon(N_{n+1}) \\ \beta_n^{PR} = \dfrac{(g_{n+1} - g_n, g_{n+1})_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}{(g_n, g_n)_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}, \qquad d_{n+1} = g_{n+1} + \beta_n^{PR}\, d_n \qquad \text{(en 1969)} \\ \beta_n^{D} = \dfrac{(\nabla^2 J_\varepsilon(N_n)\, d_n, g_{n+1})_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}{(\nabla^2 J_\varepsilon(N_n)\, d_n, d_n)_{\mathcal{H}(\mathbb{R}^+)}}, \qquad d_{n+1} = g_{n+1} + \beta_n^{D}\, d_n \qquad \text{(en 1967)} \end{cases}$$

$*$ Cette figure montre la solution approchée par 3 méthodes de minimisation dans le cas explicite (λ entre $0.3\mu m$ et $2.5\mu m$ avec 10 000 itérations), on trouve que l'algorithme de Barzilai-Borwein est la meilleure méthode pour minimiser le coût.



[5] William W. HAGER and H. ZHANG, A survey of nonlinear conjugate gradient methods, 2005

Conclusion

Remarque

Le spectroradiomètre mesure le rayonnement spectral dans la gamme $[0.3\,\mu m, 2.5\,\mu m]$.

$*$ La présence de r^2 dans les formules des coefficients de l'équation de transfert radiatif (selon théorie de Mie) influe sur leur reconstruction pour les rayons petits.

Les prochaines étapes:

$*$ Considérer des fonctions Φ quelconques (à partir de vraies granulométries)

$*$ Optimiser la méthode par le choix des longueurs d'onde, l'angle θ, et l'ouverture de cône δ

$*$ Travailler avec des mesures expérimentales.

$*$ Reconstruire les caractéristiques optiques dans un domaine 3D (Méthode de Monte-Carlo pour l'ETR).

Merci de votre attention.