Calculs de modes dans un guide d'ondes ouvert

Augustin LECLERC, LMI - INSA Rouen **Antoine TONNOIR**, LMI - Rouen
Hélène BARUCQ, Inria (Makutu) - Bordeaux **Christian GOUT**, LMI - Rouen
Marc DURUFLÉ, Inria (Makutu) - Bordeaux

Dans cette présentation, on s'intéressera au calcul de modes dans un guide tri-dimensionnel ouvert, en considérant le problème de Helmholtz suivant :

$$-\Delta U - \rho\,\omega^2 U = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

où ω est la pulsation, $\rho = \rho(x,y) \geq \rho_- > 0$ est une fonction invariante par rapport à la direction z et où il existe une constante ρ_∞ telle que la fonction $\rho(x,y) - \rho_\infty$ est à support compact dans le plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. On notera par ailleurs $\rho_+ = ||\rho||_\infty$.
On cherche des solutions modales de la forme $U(x,y,z) = u(x,y)e^{i\beta z}$ où $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et $\beta \in \mathbb{C}$ est la valeur propre, ce qui mène au problème aux valeurs propres suivant :

$$-\Delta_{x,y} u - (\rho\,\omega^2 - \beta^2)u = 0 \;\; \text{dans } \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

où $\Delta_{x,y} = \partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2}$ est le Laplacien transverse.
En raisonnant par l'absurde et en utilisant un théorème de type Rellich [1], on peut montrer que si la fonction propre u est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors la valeur propre β est telle que β^2 appartient à $\omega^2[\rho_-, \rho_+]$.

Pour prendre en compte le comportement des ondes à l'infini, on propose plusieurs conditions aux limites absorbantes (CLA) sur une frontière fictive $\partial\Omega$:

- $\dfrac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} - i\omega\sqrt{\rho_\infty - \rho^+}\, u|_{\partial\Omega} = 0$
- $\dfrac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} + \left(-\dfrac{\varepsilon_0}{2} + \dfrac{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}{2\,\varepsilon_0}\right) u|_{\partial\Omega} = 0$, où $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^-$ est un petit paramètre.
- $\dfrac{\partial u}{\partial r}|_{\partial\Omega} + \left(-\dfrac{\varepsilon_0}{4} + \dfrac{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}{4\,\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_\infty\omega^2 - \beta^2}{\varepsilon_0 + \frac{\beta^2 - \rho_\infty\omega^2}{\varepsilon_0}}\right) u|_{\partial\Omega} = 0$, où $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^-$ est un petit paramètre.

Ces conditions au bord sont très efficaces lorsque la pulsation ω est grande. Toutefois, lorsqu'elle est proche de 0, on devra bien choisir la CLA ainsi que le rayon du domaine Ω pour obtenir des résultats réalistes. Des exemples numériques seront également présentés.

[1] A.-S. Bonnet-BenDhia, S. Fliss, C. Hazard, A. Tonnoir. *A rellich type theorem for the helmholtz equation in a conical domain.* C. R. A. S. Paris Ser. I, **354**, 2016.

Contact : `augustin.leclerc@insa-rouen.fr`