# Contrôlabilité pour le problème de Stefan

**Jérôme LOHÉAC**, CRAN - Nancy **Blaise COLLE**, CRAN/IECL - Nancy
**Takéo TAKAHASHI**, IECL - Nancy

On s'intéresse ici au problème de Stefan. Ce problème modélise la température des deux phases ainsi que la position de l'interface solide/liquide dans un solide en fusion. Si les deux phases sont connexes et occupent l'intervalle $[0,1]$ et si on note $b$ la position de l'interface, on obtient le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{y}_l(t,x) &= \partial_x^2 y_l(t,x) && (t>0,\ x\in(0,b(t))),\\ \dot{y}_s(t,x) &= \partial_x^2 y_s(t,x) && (t>0,\ x\in(b(t),1)). \end{aligned}$$

Les deux phases ont leur température régie par l'équation de la chaleur tandis que la position de l'interface suit la loi :

$$\dot{b}(t) = \partial_x y_s(t,b(t)) - \partial_x y_l(t,b(t)) \qquad (t>0).$$

À l'interface solide/liquide, la température est égale à la température de fusion (supposée ici nulle),

$$y_l(t,b(t)) = y_s(t,b(t)) = 0 \qquad (t>0).$$

Affin d'éviter l'apparition de nouvelles phases, on imposera les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} y_l(t,x) &\geq 0 && (t>0,\ x\in(0,b(t))),\\ y_s(t,x) &\leq 0 && (t>0,\ x\in(b(t),1)). \end{aligned}$$

Ce système est muni de conditions initiales et aux bords. Concernant le caractère bien posé du modèle, on pourra se référer à [1, 2].

On s'intéresse à la contrôlabilité de ce modèle. Bien qu'il existe des résultats de stabilisation, cf. e.g. [4], il n'existe à notre connaissance aucun résultat de contrôle exact ou approché pour ce système.
On présentera ici un résultat de contrôle exact vers un état stationnaire, c.-à-d. un état de la forme :

$$\begin{aligned} \bar{y}_l(x) &= \bar{v}(\bar{b}-x) && (x\in(0,\bar{b})),\\ \bar{y}_s(x) &= \bar{v}(\bar{b}-x) && (x\in(\bar{b},1)), \end{aligned}$$

avec $\bar{b}\in(0,1)$ et $\bar{v}\in\mathbb{R}_+$.
Notre résultat de contrôlabilité exacte est basé sur la platitude, cf. [5], et utilise des résultats de [3].

[1] J. R. Cannon, M. Primicerio. *A two phase Stefan problem with flux boundary conditions.* Ann. Mat. Pura Appl. (4), **88**, 193–205, 1971. doi :10.1007/BF02415067.

[2] J. R. Cannon, M. Primicerio. *A two phase Stefan problem with temperature boundary conditions.* Ann. Mat. Pura Appl. (4), **88**, 177–191, 1971. doi :10.1007/BF02415066.

[3] W. B. Dunbar, N. Petit, P. Rouchon, P. Martin. *Motion planning for a nonlinear Stefan problem.* ESAIM, Control Optim. Calc. Var., **9**, 275–296, 2003. doi :10.1051/cocv :2003013.

[4] S. Koga, M. Krstic. *Single-boundary control of the two-phase Stefan system.* Syst. Control Lett., **135**, 9, 2020. doi :10.1016/j.sysconle.2019.104573. Id/No 104573.

[5] P. Martin, L. Rosier, P. Rouchon. *Null controllability of the heat equation using flatness.* Automatica, **50(12)**, 3067–3076, 2014. doi :10.1016/j.automatica.2014.10.049.

Contact : `blaise.colle@univ-lorraine.fr`