Un schéma préservant l'asymptotique pour le modèle M_1 sur maillage conique

Clément LASUEN, CEA, DAM, DIF - F-91297 Arpajon

Ce travail porte sur l'étude d'un schéma numérique $2D$ pour le modèle M_1 (1) sur maillage conique. Ce modèle s'écrit :

$$\partial_t E + \frac{1}{\varepsilon}\text{div } \mathbf{F} = 0, \qquad \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon}\text{div } P = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2}\mathbf{F}, \tag{1}$$

où ε est un coefficient positif, $\sigma > 0$ est l'opacité et est supposée constante. La variable spatiale est $\mathbf{x} \in R^2$. Les inconnues du système (1) sont l'énergie radiative $E(t, \mathbf{x})$ et le flux radiatif $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \in R^2$. Le tenseur de pression $P(t, \mathbf{x}) \in R^{2\times 2}$ dépend de E et $\mathbf{F}$. Ce modèle approxime les premiers moments de l'équation de transfert radiatif à l'aide d'une relation de fermeture entropique. La résolution numérique de ce type de modèles permettra de simuler des réactions de fusions par confinement inertiel (FCI). De plus, lorsque le paramètre ε tend vers 0, le flux $\mathbf{F}$ tend vers $\mathbf{0}$ et l'énergie E tend vers la solution d'une équation de diffusion. Du point de vue des applications, il est important pour un schéma numérique discrétisant le modèle M_1 d'être consistant avec cette limite. Ce type de schéma est dit *préservant l'asymptotique* (ou *asymptotic preserving* ou AP en anglais). Un tel schéma existe déjà pour des maillages polygonaux [2] et le travail que nous exposons ici consiste à l'adapter à des maillages coniques. Ce terme désigne un maillage $2D$ où les arêtes sont des courbes de Bézier rationnelles quadratiques $\{\mathbf{M}^\omega(q),\ q \in [0,1]\}$ (voir figure 1), où $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}^\omega(0)$ et $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^\omega(1)$ sont les sommets de l'arête, $\mathbf{M}_1$ est un point de contrôle et $\omega \geq 0$ est un poids scalaire.

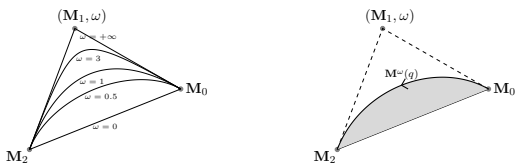

FIGURE 1 – Courbe de Bézier rationnelle quadratique.

Après avoir détaillé les propriétés de ce type de maillage, nous montrons comment le système (1) peut être reformulé comme un système de la dynamique des gaz. En suivant les idées développées dans [2] et [1], nous présentons la construction du schéma sur maillage conique. Nous adaptons également le travail [3] et détaillons une méthode de reconstruction à l'ordre 2 en espace. De plus, nous donnons une preuve rigoureuse du caractère AP du schéma et obtenons un critère CFL garantissant que la solution numérique reste bien dans le domaine des solutions admissibles. Enfin, nous constatons numériquement que le schéma limite, obtenu en faisant tendre ε vers 0, est bien consistant avec l'équation de diffusion.

[1] X. Blanc, V. Delmas, P. Hoch. *Asymptotic preserving schemes on conical unstructured 2d meshes.* International Journal for Numerical Methods in Fluids.

[2] E. Franck. *Construction et analyse numérique de schema asymptotic preserving sur maillages non structurés. application au transport linéaire et aux systèmes de friedrichs.* Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.

[3] P. Hoch, E. Labourasse. *A frame invariant and maximum principle enforcing second-order extension for cell-centered ALE schemes based on local convex hull preservation.* Internat. J. Numer. Methods Fluids.

Contact : `clement.lasuen@gmail.com`